Math. U.
62 wa

Aus der
Aue'schen Buchhandlung
A. DESBARATS
Dessau.

Math. U. 62 wa Gerlach

9057
17

XVII d
6

Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,

Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium zu Parchim.

Dritter Theil.

Zweiter Cursus der Arithmetik.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.

Dessau.

Verlag von A. Desbarats.

1867.

Bibliothek
des
K. St. Ministeriums d. Innern
für Kirchen u. Schul Angeleg.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Der zweite Cursus der Arithmetik bildet nach Inhalt und Form eine Fortsetzung des ersten Theiles und ist für die oberen Gymnasialklassen bestimmt. Er enthält neben den Abschnitten, welche als unentbehrlich für den Unterricht gelten können, auch noch einige Capitel, die nicht regelmäßig in den Lehrplan aufgenommen zu werden pflegen, die aber jedenfalls dem Privatfleiße der strebsameren Schüler anzuempfehlen sind. Dahin gehören hauptsächlich die drei letzten Capitel, durch welche die Arithmetik erst zum eigentlichen Abschluß gelangt.

Einige Eigenthümlichkeiten in der Anordnung des Inhalts werden sich aus didaktischen Gründen rechtfertigen lassen. Der allgemeine binomische Lehrsatz steht nicht in unmittelbarer Verbindung mit dem einfacheren Falle des betreffenden Problems, und ebensowenig folgen die Summen- und Differenzenreihen sogleich nach den Progressionen, wie beides auch beim Unterrichte nicht der Fall zu sein pflegt. Das erste Capitel, welches von der allgemeineren Bedeutung der Operationszeichen handelt, müßte seinem Inhalte nach das zweite Capitel des ersten Cursus bilden. Für den Unterricht wäre es aber an dieser Stelle unbrauchbar, während es an der jetzigen als Rückblick auf das Frühere und als Einleitung zum Folgenden zweckmäßig zu verwenden ist.

Von der vorigen Auflage unterscheidet sich die neue insbesondere dadurch, daß die Lehre von den ganzen Potenzen und Wurzeln zum ersten Cursus gezogen worden ist, weshalb die beiden ersten Capitel haben vollständig umarbeitet werden müssen. Außerdem ist die ebene Trigonometrie, welche bisher die zweite Abtheilung des dritten Theiles bildete, von demselben getrennt worden.

H. Gerlach.

Inhalt.

Zweiter Cursus der Arithmetik.

Berichtigungen.

Seite 10, §. 15, Zeile 2 lies wobei $\sqrt{b}$ statt wobei b.

Seite 39, Beispiel 4, Zeile 7 lies 40000 statt 4000.

Seite 46, Zeile 6 lies $m_{(\alpha)}$ und $m_{(m-\alpha)}$ statt $a_{(m)}$ und $a_{(a-m)}$.

Seite 57, Zeile 7 lies $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}$ statt $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16}$.

Seite 89, Zeile 11 lies im dritten Gliede $\frac{q}{3}$ statt $\frac{p}{3}$, im vierten $\frac{p}{3}$ statt $\frac{q}{3}$.

Zweiter Cursus

der

Arithmetik.

Arithmetik.

Erstes Capitel.

Von der allgemeineren Bedeutung der Operationszeichen.

§. 1. Erklärung.

Die Erklärungen der Operationszeichen gehen ursprünglich davon aus, daß zwei Zahlen der Zahlenreihe zu einer dritten verbunden werden sollen. Bei der Erklärung der Gleichung und des Addirens kann selbstverständlich von anderen Zahlen noch nicht die Rede sein, und da diese Erklärungen und die daraus abgeleiteten Sätze allem Späteren zu Grunde liegen, so muß auch bei den folgenden Operationen die Voraussetzung gemacht werden, daß eine jede Zahlenverbindung ebenfalls eine Zahl der Zahlenreihe bezeichne. Dieser Voraussetzung genügen aber nur die direkten Operationen, das Addiren, Multipliziren, Potenziren, während die indirekten Operationen zu Ausdrücken führen, welche nicht nothwendig Zahlen der Zahlenreihe bedeuten. Man muß daher mögliche und unmögliche Verbindungen unterscheiden und muß letztere aus dem vorher angegebenen Grunde vorläufig von der Betrachtung ausschließen. Wenn nun bei der Anwendung der Ausdrücke $(a-b)$ und $(a:b)$ vorausgesetzt wird, daß dieselben jedesmal Zahlen der Zahlenreihe bezeichnen, so lassen sich zwar die Regeln feststellen, nach welchen die Zahlen durch die verschiedenen Operationen mit einander verbunden werden, aber diese Regeln gelten dann auch nur unter der eben angeführten Voraussetzung, und ein Rechnen mit allgemeinen Buchstabenausdrücken ist in diesem Falle nicht möglich. Die engere Bedeutung der Operationszeichen, welche die unmöglichen Zahlenverbindungen ausschließt, bedarf daher einer Erweiterung.

§. 2. Erklärung.

Bei der Erweiterung der einzelnen Erklärungen benutzt man die Sätze, welche für die möglichen Zahlenverbindungen gelten. Diese Sätze zeigen im Allgemeinen, wie man eine Verbindung zweier zusammengesetzten Ausdrücke auch in der Art berechnen könne, daß man zugleich die zusammengesetzten Ausdrücke in ihre einfachen Bestandtheile zerlegt. Diese zweite Art der Berechnung kann man aber wiederum als Erklärung benutzen; sie giebt an, was unter der Verbindung der zusammengesetzten Ausdrücke zu verstehen sei, wenn letztere nicht als einfache Zahlen betrachtet werden sollen. Da z. B. $a(b - c) = ab - ac$ ist, so kann man unter dem Ausdruck $a(b - c)$ ebensowohl eine Summe aus $(b - c)$ gleichen Summanden a, wie auch die Differenz $ab - ac$ verstehen, und man kann sich beliebig der einen oder der andern Erklärung bedienen. Die erste Erklärung verlangt aber, daß $(b - c)$ eine Zahl der Zahlenreihe sei, während die zweite von dieser Bedingung unabhängig und insofern allgemeiner ist.

In dieser Weise erhält man für die vier ersten Operationen folgende erweiterte Erklärungen:*)

1) Die Ausdrücke $(a - b)$ und $(a : b)$ behalten ihre frühere Bedeutung, brauchen aber nicht Zahlen der Zahlenreihe zu bezeichnen.
2) Die Gleichung $a - b = c - d$ giebt an, daß $a + d = b + c$ ist.
3) Die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ giebt an, daß $ad = bc$ ist.
4) Die Summe $(a - b) + (c - d)$ giebt an, daß a und c additiv, b und d subtractiv sind, bezeichnet also die Differenz $(a + c) - (b + d)$.
5) Die Differenz $(a - b) - (c - d)$ giebt an, daß a und d additiv, b und c subtractiv sind, bezeichnet also die Differenz $(a + d) - (b + c)$.
6) Das Produkt $a(b - c)$ bezeichnet die Differenz $ab - ac$.
7) Die Summe (Differenz) $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d}$ bezeichnet den Quotienten $\frac{ad \mp bc}{bd}$.
8) Das Produkt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ bezeichnet den Quotienten $\frac{ac}{bd}$.
9) Der Quotient $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ bezeichnet den Quotienten $\frac{ad}{bc}$.

---

*) Vergleiche Arithmetik I, §§. 17, 28, 43. Von der erweiterten Bedeutung der noch übrigen Operationszeichen handelt das nächstfolgende Capitel.

Anm. 1. Die früheren engeren Erklärungen werden durch die erweiterten nicht aufgehoben; sie sind aber nur auf besondere Fälle anwendbar, während die erweiterten jeden möglichen Fall berücksichtigen. In ihrer engeren Bedeutung drücken die Operationszeichen Beziehungen zwischen Zahlen, in ihrer erweiterten drücken sie Beziehungen zwischen den verschiedenen Operationen aus. Die oben angeführten Summen, Produkte u. s. w. haben daher eine nur bildliche Bedeutung; es ist z. B. der Ausdruck $a(b - c)$ eigentlich eine Differenz, aber dieselbe ist unter dem Bilde eines Produkts dargestellt.

Anm. 2. Die Erklärung des Differenzquotienten ist oben übergangen worden, weil sie nicht allgemeiner ist, als die der gebrochenen Zahl (Arithm. I, §. 45).

§. 3. Zusatz.

Es entsteht nun die Frage, ob die Sätze, welche für mögliche Zahlenverbindungen gelten, auch dann noch richtig bleiben, wenn man die in vorigem §. aufgestellten Erklärungen zu Grunde legt und es also unentschieden läßt, ob eine vorkommende Zahlenverbindung möglich sei, oder nicht.

Die allgemeine Gültigkeit der Sätze, nach welchen Zahlen durch die vier ersten Operationen mit einander verbunden werden, ergiebt sich indeß aus der nachfolgenden Betrachtung, bei welcher vorausgesetzt wird, daß ein einfacher Buchstabe jedesmal eine Zahl der Zahlenreihe bezeichnet.

Jede Gleichung, welche Differenzen oder Quotienten enthält, läßt sich mit Hülfe der erweiterten Erklärungen so umformen, daß nur noch direkte Operationen auszuführen sind, also alle vorkommenden Ausdrücke Zahlen der Zahlenreihe bezeichnen. Der Inhalt der Gleichung ist alsdann in zweifacher Form ausgedrückt; die eine Form giebt Beziehungen zwischen allgemeinen Ausdrücken, die andere zwischen Zahlen der Zahlenreihe an. Einige Beispiele mögen dies erläutern:

Erste Form: Ist $m - n = v - w$, so ist auch $a(m - n) = a(v - w)$.

Zweite „ : Ist $m + w = n + v$, so ist auch $am - an = av - aw$,
oder $am + aw = an + av$.

Erste Form: Ist $m - n = v - w$, $v - w = x - y$,
so ist auch $m - n = x - y$.

Zweite „ : Ist $m + w = n + v$, $v + y = w + x$,
so ist auch $m + y = n + x$.

Erste Form: Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d} + \frac{x}{y}$.

Zweite „ : Ist $ad = bc$, so ist auch $\frac{ay + bx}{by} = \frac{cy + dx}{dy}$,
oder $aydy + bxdy = cyby + dxby$.

Die ersten Formen sind unzweifelhaft richtig, wenn die vorkommenden Differenzen und Quotienten Zahlen der Zahlenreihe bezeichnen, und unter derselben Voraussetzung sind es dann auch die zweiten. Die Richtigkeit der zweiten Formen kann aber nicht von dieser Voraussetzung abhängen. Es müssen sich nämlich die Beweise für diese Formen, die nur Beziehungen zwischen den direkten Operationen ausdrücken, in der Art führen lassen, daß man die indirekten Operationen als nicht vorhanden betrachtet; sie müssen entweder aus den engeren Erklärungen des Addirens oder Multiplicirens abgeleitet, oder auf die Grundsätze zurückgeführt werden können, daß $a = b$ ist, wenn $a + m = b + m$, oder wenn $am = bm$ ist.

Eine zweite Form kann daher nicht in beschränkter Weise richtig sein. Entweder ist sie überhaupt nicht richtig, oder es müssen für die vorkommenden Buchstaben beliebige Zahlen der Zahlenreihe eingesetzt werden können. Wenn nun die zweite Form eines Satzes für den besonderen Fall richtig ist, daß gewisse Verbindungen der einzelnen Ausdrücke durch indirekte Operationen Zahlen der Zahlenreihe bedeuten, so kann die Richtigkeit für diesen besonderen Fall nur davon herrühren, daß der Satz allgemein richtig ist, d. h. daß die vorkommenden Buchstaben jede Zahl der Zahlenreihe bedeuten können. Hat aber die zweite Form eines Satzes eine allgemeine Gültigkeit, so ist dies auch bei der ersten Form der Fall.

Anm. Das Verständniß dieser Betrachtung wird erleichtert, wenn man die Beweise für einige einzelne Sätze vollständig ausführt. Das nächste Capitel enthält mehrere Beweise dieser Art, welche als weitere Beispiele dienen können.

Zweites Capitel.

Von den Differenz- und Bruchpotenzen und von den allgemeinen Wurzeln.

A. Von den Differenzpotenzen.

§. 4. Erklärung.

Das Zeichen a^{m-n} bedeute von jetzt an nicht mehr ein Produkt aus $m - n$ gleichen Faktoren a, sondern den Quotienten $a^m : a^n$ (Vergl. Ar. I, §. 91, 2). In Folge dieser Erklärung kann der Exponent $m - n$ eine allgemeine Differenz sein, und der Ausdruck a^{m-n} heißt daher eine Differenzpotenz.

§. 5. Lehrsatz.

Ist $m - n = v - w$, so ist auch $a^{m-n} = a^{v-w}$.

Beweis. Bildet man die zweite Form dieses Satzes (vergl. §. 3), so erhält man:

Ist $m + w = n + v$, so ist auch $a^m : a^n = a^v : a^w$,

oder $a^m \,.\, a^w = a^n \,.\, a^v$.

In dieser Form ist der Satz richtig, denn aus $m + w = n + v$ folgt, daß $a^{m+w} = a^{n+v}$, oder daß $a^m \,.\, a^w = a^n \,.\, a^v$ ist.

Anm. Es ergiebt sich hieraus, daß eine Differenzpotenz nur einen einzigen Werth hat.

§. 6. Lehrsätze.

1) $a^0 = 1$;

2) $a^{-m} = 1 : a^m$.

Beweis zu 1. Es ist $a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$.

Beweis zu 2. Es ist $a^{-m} = a^{0-m} = a^0 : a^m = 1 : a^m$.

§. 7. Lehrsätze.

Sind m und n allgemeine Differenzen, so gelten noch immer folgende Sätze:

1) $(a \,.\, b)^m = a^m \,.\, b^m$;

2) $a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$;

3) $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Beweis zu 1. Ist $m = v - w$, und bildet man die zweite Form des gegebenen Lehrsatzes, so behauptet die Gleichung

$$(a \,.\, b)^{v-w} = a^{v-w} \,.\, b^{v-w},$$

daß $(ab)^v : (ab)^w = (a^v : a^w) \,.\, (b^v : b^w)$,

oder daß $a^v b^v : a^w b^w = a^v b^v : a^w b^w$ ist.*)

Diese Behauptung ist aber richtig.

---

*) Es ist in diesem Falle nicht mehr nöthig, auch noch das Divisionszeichen zu entfernen, wie es nach §. 3 eigentlich geschehen müßte.

Beweis zu 2. Ist $m = v - w$, $n = x - y$, so behauptet die Gleichung

$$a^{(v-w)+(x-y)} = a^{v-w} . a^{x-y},$$

oder $a^{(v+x)-(w+y)} = a^{v-w} . a^{x-y}$,

daß $a^{v+x} : a^{w+y} = (a^v : a^w) . (a^x : a^y)$,

oder daß $(a^v . a^x) : (a^w . a^y) = (a^v . a^x) : (a^w . a^y)$ ist.

Diese Behauptung ist aber richtig.

Beweis zu 3. Ist $m . n = (v - w) . (x - y) = (vx + wy) - (vy + wx)$, so behauptet die Gleichung

$$a^{(vx+wy) - (vy+wx)} = (a^{v-w})^{x-y},$$

daß $(a^{vx} . a^{wy}) : (a^{vy} . a^{wx}) = (a^v : a^w)^{x-y} = (a^v : a^w)^x : (a^v : a^w)^y$,

oder $(a^{vx} . a^{wy}) : (a^{vy} . a^{wx}) = (a^{vx} : a^{wx}) : (a^{vy} : a^{wy})$,

oder $(a^{vx} . a^{wy}) : (a^{vy} . a^{wx}) = (a^{vx} . a^{wy}) : (a^{vy} . a^{wx})$ ist.

Diese Behauptung ist aber richtig.

Anm. Da sich aus diesen Sätzen die übrigen für ganze Potenzen aufgestellten Sätze ableiten lassen, so sind dieselben sämmtlich auch für Differenzpotenzen richtig. Es ergeben sich hieraus folgende und ähnliche Umformungen:

$a^5 . a^{-3} = a^2$; $\quad a^3 : a^{-4} = a^{3-(-4)} = a^7$;

$a^{-3} . a^{-4} = a^{-7}$; $\quad a^{-3} : a^{-4} = a$;

$a^4 . a^{-6} = a^{-2}$; $\quad a^{-6} : a^{-4} = a^{-2}$;

$a^4 . a^0 = a^4$; $\quad a^{-3} : a^0 = a^{-3}$;

$(a : b)^{-n} = (b : a)^n$; $\quad a : (b : c)^{-m} = a : (c : b)^m = a . (b : c)^m$.

B. Von den Bruchpotenzen.

§. 8. Erklärung.

Das Zeichen $a^{\frac{n}{m}}$ bedeute von jetzt an nicht mehr ein Produkt aus $(n : m)$ gleichen Faktoren a, sondern die Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$ (Nr. I, §. 97, 5). In Folge dieser Erklärung kann der Exponent $(n : m)$ eine gebrochene Zahl

sein, und der Ausdruck $a^{\frac{n}{m}}$ heißt daher eine **Bruchpotenz**. Ferner bezeichne die Gleichung $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[w]{b^v}$, daß $a^{nw} = b^{vm}$ ist (Arithm. I' §. 98, 8).

Anm. Eine Bruchpotenz ist eigentlich mehrdeutig, da sie eine Wurzel bezeichnet. (Ar. I, §. 94). Zunächst sollen aber unter den Wurzeln und Bruchpotenzen nur die absoluten Wurzelwerthe verstanden werden.

§. 9. Zusatz.

In dem Ausdrucke $a^{n:m}$ kann n eine allgemeine Differenz bezeichnen (§. 4), während nach den früheren Erklärungen m eine positive (ganze) Zahl sein muß. Statt der Form $a^{\frac{-n}{m}}$ kann man sich alsdann auch der gleichbedeutenden Form $a^{-\frac{n}{m}}$ bedienen. Es ist nämlich

$$a^{\frac{-n}{m}} = \sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{1 : a^n} = 1 : a^{\frac{n}{m}} = a^{-\frac{n}{m}}.$$

§. 10. Lehrsatz.

Ist $\frac{n}{m} = \frac{v}{w}$, so ist auch $a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{v}{w}}$.

Beweis. Bildet man die zweite Form dieses Lehrsatzes, so erhält man: Ist $nw = vm$, so ist auch $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[w]{a^v}$, oder $a^{nw} = a^{vm}$ (§.8). Diese Behauptung ist aber richtig.

§. 11. Lehrsätze.

$$1)\ (a \,.\, b)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \,.\, b^{\frac{n}{m}};$$

$$2)\ a^{\frac{n}{m} + \frac{v}{w}} = a^{\frac{n}{m}} \,.\, a^{\frac{v}{w}};$$

$$3)\ a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{v}{w}} = \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{v}{w}} = \left(a^{\frac{v}{w}}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Beweis zu 1. Bildet man die zweite Form, so behauptet die Gleichung

$$(a \,.\, b)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \,.\, b^{\frac{n}{m}},$$

$$\text{daß} \quad \sqrt[m]{(ab)^n} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^n},$$

$$\text{oder daß} \quad \sqrt[m]{a^n \cdot b^n} = \sqrt[m]{a^n \cdot b^n} \text{ ist.*)}$$

Beweis zu 2. Setzt man $\frac{n}{m} + \frac{v}{w} = \frac{nw + vm}{mw}$, so behauptet die Gleichung

$$a^{\frac{nw + vm}{mw}} = a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{v}{w}},$$

$$\text{daß} \quad \sqrt[mw]{a^{nw + vm}} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[w]{a^v},$$

$$\text{oder daß} \quad \sqrt[mw]{a^{nw} \cdot a^{vm}} = \sqrt[mw]{a^{nw} \cdot a^{vm}} \text{ ist.}$$

Beweis zu 3. Bildet man die zweite Form, so behauptet die Gleichung

$$a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{v}{w}} = \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{v}{w}},$$

$$\text{daß} \quad \sqrt[mw]{a^{nv}} = \sqrt[w]{\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^v} = \sqrt[w]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^v} = \sqrt[w]{\sqrt[m]{a^{nv}}},$$

$$\text{oder daß} \quad \sqrt[mw]{a^{nv}} = \sqrt[mw]{a^{nv}} \text{ ist.}$$

Anm. Da sich aus diesen Sätzen die übrigen für die ganzen Potenzen aufgestellten Sätze ableiten lassen, so sind dieselben sämmtlich allgemein gültig, d. h. sie gelten für den Fall, daß der Exponent eine beliebige reelle Zahl bezeichnet. Ist m eine reelle Zahl, so nennt man den Ausdruck a^m eine reelle Potenz. — Aus dem Gesagten ergeben sich folgende und ähnliche Umformungen:

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}}; \qquad 3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{5}{12}};$$

$$3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}}; \qquad 3^{\frac{1}{2}} : 3^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}};$$

$$(a:b)^{\frac{-n}{m}} = (b:a)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n : a^n}.$$

---

*) Es ist bei diesem und den folgenden Sätzen überflüssig, am Schluß des Beweises auch noch das Wurzelzeichen zu entfernen (nach §. 8), wie es nach §. 3 eigentlich geschehen müßte.

§. 12. Zusatz.

Gebraucht man statt des Ausdrucks $\sqrt[m]{a}$ die Form $a^{\frac{1}{m}}$, statt des Ausdrucks $\sqrt[m]{a^n}$ die Form $a^{\frac{n}{m}}$, so sind sämmtliche für die Wurzeln aufgestellten Sätze schon in den für die Potenzen aufgestellten enthalten, oder lassen sich aus denselben mit Hülfe der vier ersten Operationen ableiten.

Anm. Im Anschluß an das Vorangehende könnte man auch Wurzeln mit gebrochenen oder negativen Exponenten in der Rechnung einführen, indem man $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:n]{a}$, ferner $1 : \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[-(m:n)]{a}$ setzte. Diese Formen würden indessen die Rechnung nicht erleichtern, und man sucht daher lieber jede Wurzel auf die Form einer Potenz zu bringen, statt umgekehrt.

§. 13. Erklärung.

Zwei mehrdeutige Bruchpotenzen (Wurzeln) sind gleich, wenn beide die nämliche Anzahl von Werthen haben, und wenn jedem Werthe der einen irgend ein Werth der andern entspricht. In diesem Sinne folgt aus $a = b$, daß auch $a^{\frac{n}{m}} = b^{\frac{n}{m}}$ ist.

Die Gleichheit zweier mehrdeutigen Bruchpotenzen darf aber nicht daraus abgeleitet werden, daß die absoluten Wurzelwerthe einander gleich sind. Es haben z. B. die Ausdrücke $a^{\frac{1}{1}}$ und $a^{\frac{2}{2}}$ denselben absoluten Wurzelwerth, aber der erstere Ausdruck ist überhaupt nur eindeutig, während der andere zwei Werthe hat, $+ a$ und $- a$.

§. 14. Zusatz.

Aus vorigem §. ergiebt sich, daß die Sätze, welche für eindeutige Bruchpotenzen (Wurzeln) gelten, nicht mehr richtig zu sein brauchen, sobald man mit mehrdeutigen Ausdrücken rechnet, weil zwei mehrdeutige Wurzeln eine verschiedene Anzahl von Werthen haben können, auch wenn die absoluten Wurzelwerthe einander gleich sind. Die Frage, wie man mit mehrdeutigen Wurzeln zu rechnen habe, läßt sich folglich erst dann beantworten, wenn man die Werthe einer jeden mehrdeutigen Wurzel anzugeben vermag, bietet aber dann keine weiteren Schwierigkeiten. Im Allgemeinen hat man jedoch nur auf folgende Bestimmungen zu achten:

1) Ist $a^m = b^m$, so ist nicht nothwendig $a = b$; es ist aber a gleich einem der Werthe, welche die m^te Wurzel aus b^m hat.

2) Ist $\frac{n}{m} = \frac{v}{w}$, so ist nicht nothwendig $a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{v}{w}}$. Es können zwar beide Ausdrücke in einzelnen Werthen übereinstimmen, aber die Anzahl der Werthe ist nicht nothwendig bei beiden dieselbe. Zwei gleiche Quotienten dürfen also, wenn sie als Exponenten auftreten sollen, nicht mit einander vertauscht werden.

§. 15. Zusatz.

Die mehrdeutigen Quadratwurzeln haben zwei Werthe, einen positiven und einen negativen. Ist also $a = b$, so ist $\sqrt{a} = \mp \sqrt{b}$, wobei b den absoluten Wurzelwerth bezeichnet.

Um zu erfahren, ob ein Lehrsatz, der für eindeutige Quadratwurzeln gilt, auch für mehrdeutige Quadratwurzeln angewendet werden darf, verbindet man jede einzelne Wurzel mit beiden Vorzeichen und untersucht, ob beide Seiten der Gleichung dieselbe Anzahl von Werthen liefern. Es sind deshalb auch nur wenige Sätze besonders hervorzuheben.

§. 16. Lehrsätze.*)

1) $(\sqrt{a})^2 = a$;

2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$;

3) $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$;

4) $\sqrt{am} \mp \sqrt{bm} = \sqrt{m}\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$.

Beweis zu 1. Er folgt aus der Erklärung der Wurzel.

Beweise zu 2 und 3. Von den beiden Ausdrücken auf der linken Seite der Gleichung kann jeder das doppelte Vorzeichen haben. Das Produkt (der Quotient) kann aber ebenfalls nur positiv oder negativ sein und entspricht hierin dem Ausdrucke auf der rechten Seite.

Beweis zu 4. Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung kann vier verschiedene Werthe haben, ebenso der Ausdruck auf der anderen Seite.

*) Die in diesem §. vorkommenden Wurzeln sind mehrdeutig.

C. Von den allgemeinen Wurzeln.

§. 17. Erklärung.

Eine Wurzel heißt **allgemein**, wenn ihr Radicand eine allgemeine Differenz ist, wenn sie also die Form $\sqrt[m]{a - b}$ hat. Sie ist stets mehrdeutig.

§. 18. Zusatz.

Bedeutet a — b eine positive Zahl, oder Null, so ist die m^{te} Wurzel aus a — b eine mehrdeutige ganze Wurzel, und es gilt für dieselbe das früher Gesagte. Das Nachfolgende beschränkt sich daher auf den Fall, daß der Radicand einer allgemeinen Wurzel negativ ist.

§. 19. Erklärung.

Ist der Exponent m der Wurzel $\sqrt[m]{-a}$ eine ungerade Zahl, so ist $\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{+a}$, und dieser Ausdruck bezeichnet wiederum eine mehrdeutige ganze Wurzel. Ist aber m eine gerade Zahl, so kann der Ausdruck $\sqrt[m]{-a}$ keine reelle Zahl bedeuten. Man nennt denselben einen **imaginären Ausdruck**.

Anm. Die (positiven und negativen) Zahlenausdrücke zerfallen demnach in reelle und imaginäre, die reellen in rationale und irrationale, die rationalen in ganze und gebrochene.

§. 20. Zusatz.

Da die imaginären Ausdrücke niemals irgend einer reellen Zahl gleich sind, so können sie auch nicht die Mengen der Dinge bezeichnen. Gleichwohl sind sie für die Rechnung von Wichtigkeit. Wenn sie als Resultat einer gestellten Aufgabe erhalten werden, so geben sie an, daß keine wirkliche Größe den Bedingungen der Aufgabe genügen könne. Wenn sie jedoch inmitten einer Rechnung auftreten, so ist noch immer möglich, daß sie bei fortgesetzter Rechnung wieder verschwinden, und dieselbe darf daher nicht abgebrochen werden. In dieser Beziehung vervollständigen also die imaginären Ausdrücke das Gebiet der Zahlenlehre.

§. 21. Erklärung.

Unter den imaginären Ausdrücken sind besonders die quadratischen von Wichtigkeit, da sie am häufigsten auftreten, und da sich alle übrigen auf dieselben zurückführen lassen. Die Rechnung mit denselben stützt sich auf folgende Erklärungen, welche aus §. 16 abgeleitet werden (Vergl. §. 2):

1) Es ist $(\sqrt{a-b})^2 = a - b$;

2) Die Gleichung $\sqrt{a-b} = \sqrt{c-d}$ giebt an, daß $a-b = c-d$ ist.

3) Das Produkt $\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{c-d}$ bedeutet den Ausdruck

$$\sqrt{(a-b) \cdot (c-d)}.$$

4) Der Quotient $\sqrt{a-b} : \sqrt{c-d}$ bedeutet den Ausdruck

$$\sqrt{(a-b) : (c-d)}.$$

5) Die Summe $\sqrt{m(a-b)} + \sqrt{m(c-d)}$ bedeutet den Ausdruck

$$\sqrt{m}\,(\sqrt{a-b} + \sqrt{c-d}).$$

§. 22. Zusatz.

Aus 3) des vorigen §. ergiebt sich, daß man die imaginäre Quadratwurzel $\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)}$ auch unter der Form $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$ darstellen kann, so daß sie aus einem reellen Faktor und dem Faktor $\sqrt{-1}$ besteht. In dieser zweiten Form kann jede der beiden Wurzeln das doppelte Vorzeichen haben, jedoch ist das Produkt derselben entweder positiv oder negativ. Man setzt deshalb das doppelte Vorzeichen nur zu dem Faktor $\sqrt{a}$, während man den Faktor $\sqrt{-1}$ stets eindeutig gebraucht. Man bezeichnet denselben durch den Buchstaben i. Es ist also

$$\sqrt{-a^2} = \mp a \cdot i, \quad \sqrt{-36} = \mp 6 \cdot i.$$

§. 23. Lehrsätze.

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-ab} = \sqrt{ab} \cdot i$;

2) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$;

3) $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a:b} \cdot i$;

4) $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a:b}$;

5) $\sqrt{-a} \mp \sqrt{-b} = (\sqrt{a} \mp \sqrt{b}) \cdot i$;

6) $i^{4n} = + 1$, wenn n eine positive ganze Zahl ist;

7) $i^{4n+1} = + \sqrt{-1}$;

8) $i^{4n+2} = - 1$;

9) $i^{4n+3} = - \sqrt{-1}$.

Beweise. Sie ergeben sich unmittelbar aus §§. 21 und 22.

§. 24. Zusatz.

Für die allgemeinen Quadratwurzeln gelten auch alle früheren Sätze, soweit sie für die mehrdeutigen ganzen Quadratwurzeln gelten. Der Beweis kann übergangen werden, da in dem Vorangehenden bereits gezeigt worden ist, in welcher Art ein solcher Beweis geführt werden müßte. Es ist nur zu bemerken, daß die Operationen des Potenzirens und Radizirens sich nicht erklären lassen, wenn die Exponenten keine reellen Zahlen sind, und daß daher der Ausdruck a^{mi} nach dem Bisherigen keine Bedeutung hat.

§. 25. Erklärung.

Ist von zwei Quadratwurzeln die eine reell, die andere imaginär, so ist die Summe derselben die allgemeinste Form der Zahlenbezeichnung. Es ist dies die Form $a + bi$, in welcher a und b reelle Zahlen bedeuten. Man nennt den Ausdruck $a + bi$ eine **complexe** Zahl.

§. 26. Lehrsatz.

Ist $a + bi = c + di$, so ist $a = c$, $b = d$.

Beweis. Aus $a + bi = c + di$ folgt, daß

$$i = (a - c) : (d - b) \text{ sein muß.}$$

Diese Gleichung kann aber nur dann einen Sinn haben, wenn $(a - c) : (d - b) = 0 : 0$, oder wenn $a = c$, $d = b$ ist.

§. 27. Lehrsatz.

Die Verbindung zweier complexen Zahlen durch eine der vier ersten Operationen liefert wieder eine complexe Zahl.

Beweis. Es ist

1) $(p + qi) \mp (m + ni) = (p \mp m) + (q \mp n)i = p' + q'i$;

2) $(p+qi) \cdot (m+ni) = pm + (qm+pn)\,i + qni^2$

$= (pm-qn)+(qm+pn)i = p'' + q''i;$

3) $\frac{p+qi}{m+ni} = \frac{(p+qi)(m-ni)}{(m+ni)(m-ni)} = \frac{(pm+qn)+(qm-pn)i}{m^2+n^2}$

$= \frac{pm+qn}{m^2+n^2} + \frac{qm-pn}{m^2+n^2}\,i = p''' + q'''i.$

Anm. Nach 2) ist auch $(p+qi)^x$ gleich einer complexen Zahl, wenn x eine positive ganze Zahl bedeutet.

Anhang zu der Lehre von den Potenzen und Wurzeln.

Von der Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke.

Aufgabe I. Algebraische Summen aus Potenzen oder Wurzeln durch eine der vier ersten Operationen mit einander zu verbinden.

Auflösung. Man verfährt im Allgemeinen ebenso, als wenn man mit algebraischen Summen aus einfacheren Ausdrücken zu rechnen hätte (Arithm. I, Cap. I), wendet aber außerdem bei der Verbindung der einzelnen Ausdrücke die Formeln an, welche für Potenzen und Wurzeln gelten. Da man indeß nach Einführung der Differenz- und Bruchpotenzen einen gegebenen Ausdruck auch in der Art schreiben kann, daß alle Nenner und Wurzeln verschwinden, so lassen diese Aufgaben eine zweifache Schreibform, in Folge davon auch eine zweifache Art der Berechnung zu.

Beispiel 1. Berechnung des Produktes

$$(15a^{-6}b^2 - 7a^{-5}b^4 + 6a^{-4}b^6).(8a^{-2}b^2 - 3a^{-1}b^4).$$

$$\begin{array}{rrrr}
15a^{-6}b^2 & -\ 7a^{-5}b^4 & +\ 6a^{-4}b^6 & \\
8a^{-2}b^2 & -\ 3a^{-1}b^4 & & \\
\hline
120a^{-8}b^4 & -\ 56a^{-7}b^6 & +\ 48a^{-6}b^8 & \\
 & -\ 45a^{-7}b^6 & +\ 21a^{-6}b^8 & -\ 18a^{-5}b^{10} \\
\hline
120a^{-8}b^4 & -\ 101a^{-7}b^6 & +\ 69a^{-6}b^8 & -\ 18a^{-5}b^{10}
\end{array}$$

Anm. Die Berechnung des gegebenen Produktes in der zweiten Schreibform

$$\left(\frac{15b^2}{a^6} - \frac{7b^4}{a^5} + \frac{6b^6}{a^4}\right) \cdot \left(\frac{8b^2}{a^2} - \frac{3b^4}{a}\right)$$

kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Beispiel 2. Berechnung des Quotienten

$$(-2a^{-8}b^5 + 17a^{-4}b^6 - 5b^7 - 24a^4b^8) : (2a^{-3}b^3 - 3ab^4).$$

$$\begin{array}{r|l|l}
2a^{-3}b^3 - 3ab^4 & -2a^{-8}b^5 + 17a^{-4}b^6 - 5b^7 - 24a^4b^8 & -a^{-5}b^2 \\
 & -2a^{-8}b^5 + 3a^{-4}b^6 & +7a^{-1}b^3 \\
\hline
 & +14a^{-4}b^6 - 5b^7 - 24a^4b^8 & +8a^3b^4 \\
 & +14a^{-4}b^6 - 21b^7 & \\
\hline
 & +16b^7 - 24a^4b^8 & \\
 & +16b^7 - 24a^4b^8 & \\
\hline
\end{array}$$

Anm. Vergleiche Anm. zu I.

Beispiel 3. Berechnung des Produkts

$$(3\sqrt{a} - 5\sqrt[3]{a^2} - 4\sqrt[4]{a^3}) \, . \, (2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[4]{a^3}).$$

Erste Form der Berechnung.

$$\begin{array}{l}
3\sqrt{a} - 5\sqrt[3]{a^2} - 4\sqrt[4]{a^3} \\
2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[4]{a^3} \\
\hline
6a - 10\sqrt[6]{a^4a^3} - 8\sqrt[4]{a^3a^2} \\
\quad + 9\sqrt[6]{a^3a^4} \qquad - 15\sqrt[3]{a^4} - 12\sqrt[12]{a^9a^8} \\
\qquad\qquad - 6\sqrt[4]{a^2a^3} \qquad + 10\sqrt[12]{a^8a^9} + 8\sqrt{a^3} \\
\hline
6a - a\sqrt[6]{a} - 14a\sqrt[4]{a} - 15a\sqrt[3]{a} - 2a\sqrt[12]{a^5} + 8a\sqrt{a}
\end{array}$$

Zweite Form der Berechnung.

$$\begin{array}{l}
3a^{\frac{1}{2}} - 5a^{\frac{2}{3}} - 4a^{\frac{3}{4}} \\
2a^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{3}{4}} \\
\hline
6a - 10a^{\frac{7}{6}} - 8a^{\frac{5}{4}} \\
\quad + 9a^{\frac{7}{6}} \qquad - 15a^{\frac{4}{3}} - 12a^{\frac{17}{12}} \\
\qquad - 6a^{\frac{5}{4}} \qquad + 10a^{\frac{17}{12}} + 8a^{\frac{3}{2}} \\
\hline
6a - a \, . \, a^{\frac{1}{6}} - 14a \, . \, a^{\frac{1}{4}} - 15a \, . \, a^{\frac{1}{3}} - 2a \, . \, a^{\frac{5}{12}} + 8a \, . \, a^{\frac{1}{2}}.
\end{array}$$

Beispiel 4. Berechnung des Quotienten

$$\left\{\frac{15a}{b^4} - \frac{29\sqrt[6]{a^5}}{b^3\sqrt{b}} + \frac{12\sqrt[3]{a^2}}{b^3}\right\} : \left\{\frac{5\sqrt{a}}{b^2} - \frac{3\sqrt[3]{a}}{b\sqrt{b}}\right\}.$$

Erste Form der Berechnung.

$$\frac{5\sqrt{a}}{b^2} - \frac{3\sqrt[3]{a}}{b\sqrt{b}} \;\Big|\; \frac{15a}{b^4} - \frac{29\sqrt[6]{a^5}}{b^3\sqrt{b}} + \frac{12\sqrt[3]{a^2}}{b^3} \;\Big|\; \frac{3\sqrt{a}}{b^2} - \frac{4\sqrt[3]{a}}{b\sqrt{b}}.$$

$$\frac{15a}{b^4} - \frac{9\sqrt[6]{a^5}}{b^3\sqrt{b}}$$

$$- \frac{20\sqrt[6]{a^5}}{b^3\sqrt{b}} + \frac{12\sqrt[3]{a^2}}{b^3}$$

$$- \frac{20\sqrt[6]{a^5}}{b^3\sqrt{b}} + \frac{12\sqrt[3]{a^2}}{b^3}$$

Zweite Form der Berechnung.

$$5a^{\frac{1}{2}}b^{-2} - 3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}} \;\Big|\; 15ab^{-4} - 29a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{7}{2}} + 12a^{\frac{2}{3}}b^{-3} \;\Big|\; 3a^{\frac{1}{2}}b^{-2} - 4a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}}$$

$$15ab^{-4} - 9a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{7}{2}}$$

$$-20a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{7}{2}} + 12a^{\frac{2}{3}}b^{-3}$$

$$-20a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{7}{2}} + 12a^{\frac{2}{3}}b^{-3}$$

Aufgabe II. Den Ausdruck $\dfrac{a^2 \,.\, b^2 \,.\, \sqrt{ab}}{\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt[3]{a^2b}}$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist $(a^2 \,.\, b^2 \,.\, \sqrt{ab}) : (\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt[3]{a^2b}) =$

$$a^2 \,.\, b^2 \,.\, a^{\frac{1}{2}} \,.\, b^{\frac{1}{2}} \,.\, a^{-\frac{3}{2}} \,.\, b^{-\frac{1}{2}} \,.\, a^{-\frac{2}{3}} \,.\, b^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \,.\, b^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a \,.\, b^5}.$$

Aufgabe III. Den Ausdruck $\frac{(a:b)^3 \cdot \sqrt[4]{a^5:b^2}}{\sqrt{b:a:\sqrt[3]{a^4:b}}}$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist $\left[(a:b)^3 \cdot \sqrt[4]{a^5:b^2}\right] : \left[\sqrt{b:a:\sqrt[3]{a^4:b}}\right]$

$$= a^3 \cdot b^{-3} \cdot a^{\frac{5}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}}$$

$$= a^{\frac{73}{12}} \cdot b^{-\frac{52}{12}} = \sqrt[12]{a^{73}:b^{52}}.$$

Aufgabe IV. Den Ausdruck $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ so zu reduciren, daß der Nenner rational wird.

Auflös. Es ist $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}.$

Aufgabe V. Den Ausdruck $\frac{3+\sqrt{2}}{4+\sqrt{-3}}$ in eine complexe Zahl zu verwandeln.

Auflösung. Es ist

$$\frac{3+\sqrt{2}}{4+\sqrt{-3}} = \frac{(3+\sqrt{2})(4-\sqrt{-3})}{(4+\sqrt{-3})(4-\sqrt{-3})} = \frac{4(3+\sqrt{2})-\sqrt{3}(3+\sqrt{2})i}{19}$$

Aufgabe VI. Den Ausdruck $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ so zu reduciren, daß nicht mehr die Wurzel aus einer Irrationalzahl zu ziehen ist.

Auflösung. Setzt man $\sqrt{a+b\sqrt{c}} = x+y\sqrt{c}$, so ist

$$a+b\sqrt{c} = x^2+y^2c+2xy\sqrt{c}.$$

Da x und y beliebig zu wählende Zahlen sind, so kann man setzen:

$$1)\ a = x^2+y^2c; \qquad 2)\ b = 2xy.$$

Nach 2) ist $x = (b:2y)$. Setzt man diesen Werth in 1) ein, so ist

$$\frac{b^2}{4y^2} + y^2c = a, \text{ oder}$$

$$b^2 + 4y^4c = 4ay^2,$$ daher

$$y^2 = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - b^2c}}{2c},$$

oder 3)

$$y = \sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 - b^2c}}{2c}}.$$

Nun war $x^2 = (b^2 : 4y^2)$; daher ist nach 3)

$$x^2 = \frac{b^2c}{2(a \mp \sqrt{a^2 - b^2c})},$$ oder (nach IV)

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2c}}{2},$$

oder 4)

$$x = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}}.$$

Aus 3) und 4) folgt nun:

$$\sqrt{a + b\sqrt{c}} = x + y\sqrt{c} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}}.$$

Die Aufgabe ist also gelöst, wenn $\sqrt{a^2 - b^2c}$ rational ist. Es ist z. B.

$$\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{22 + \sqrt{196}}{2}} + \sqrt{\frac{22 - \sqrt{196}}{2}}$$

$$= \sqrt{18} + \sqrt{4} = 3\sqrt{2} + 2.$$

Aufgabe VII. Den Ausdruck $\sqrt{a + bi}$ in eine complexe Zahl zu verwandeln.

Auflösung. Setzt man in Aufgabe VI $c = -1$, so erhält man

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

In diesem Resultate ist der zweite Summand imaginär, weil stets $\sqrt{a^2 + b^2} > a$ ist. Es ist also z. B.

$$\sqrt{7 + 24i} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{625}}{2}} + \sqrt{\frac{7 - \sqrt{625}}{2}} = 4 + 3i.$$

Anm. Die in VI und VII gegebenen Auflösungen gelten mit den entsprechenden Abänderungen auch für die Ausdrücke $\sqrt{a - b\sqrt{c}}$ und $\sqrt{a - bi}$.

Aufgaben.

I. Multiplication und Division.

1)† $(15a^{-6}b^{2} - 7a^{-5}b^{4} + 6a^{-4}b^{6}) \,.\, (8a^{-2}b^{2} - 3a^{-1}b^{4})$;

2)† $(3x^{-2}y^{-7} - 2x^{2}y^{-5} + 8x^{6}y^{-3}) \,.\, (2x^{-3}y^{-5} + 6xy^{-3} + 12x^{5}y^{-1})$

3)† $(x^{-3p} + 3a^{m}x^{-2p} - 10a^{2m}x^{-p}) \,.\, (a^{2}x^{q} + 5a^{m+2}x^{p+q} - 2a^{2m+2}x^{2p+q})$;

4)(1) $\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}} + 3c^{\frac{1}{3}}\right) \,.\, \left(a^{\frac{1}{2}} - 3b^{\frac{1}{2}}\right)$;

5)(2) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}\right) \,.\, \left(3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 5a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}\right)$;

6)(3) $\left(5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b\right) \,.\, \left(\,^{\frac{1}{3}} - 7a^{-\frac{2}{3}}b\right)$;

7)† $\left(3a^{\frac{5}{2}}b - 2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\right) \,.\, \left(4a^{\frac{7}{2}}b^{\frac{4}{3}} - 5a^{\frac{1}{2}}\right)$;

8)† $(6a^{-3}b^{-2} - 19a^{-4}b^{-3} + 42a^{-5}b^{-4} - 43a^{-6}b^{-5} + 30a^{-7}b^{-6})$:

$(3a^{-2}b^{-3} - 5a^{-3}b^{-4} + 6a^{-4}b^{-5})$;

9)† $(8x^{-11}y^{-3} - 22x^{-12}y^{-2} + 32x^{-13}y^{-1} - 25x^{-14} + 12x^{-15}y)$:

$(2x^{-6}y^{-2} - 4x^{-7}y^{-1} + 3x^{-8})$;

10) $\left(a + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b\right) : \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$;

11) $\left(4x^{2}y^{\frac{2}{3}} - 9x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}} - 24xy^{\frac{5}{3}} - 16x^{\frac{2}{3}}y^{2}\right) : \left(2xy^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{2}{3}}y\right)$;

12) $\left(-15\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{32} + 44\right) : \left(5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{16}\right)$;

13) $\left(3\sqrt[3]{20} - 12\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{180} + 12\right) : \left(\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{6}\right)$;

14) $(4\sqrt{5} + 150\sqrt{2} + 30 - 34\sqrt{6} + 10\sqrt{10} - 40\sqrt{12} - 6\sqrt{60})$:

$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6})$.

II. Reduction.

15) $\dfrac{\sqrt[5]{a^{12}} \,.\, \sqrt[3]{a^{8}} \,.\, \sqrt[2]{a^{3}}}{\sqrt[10]{a^{7}} \,.\, \sqrt[5]{a^{11}} \,.\, \sqrt[6]{a^{5}}}$;

16) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^9b^7} \cdot \sqrt[8]{a^7b^5} : \sqrt[2]{a^5b^5} \cdot \sqrt[3]{a^2b^4}}{\sqrt[5]{a^7b^2} \cdot \sqrt[3]{a^4b} \cdot \sqrt[6]{a^3b^5} : \sqrt[4]{a^5b^7} \cdot \sqrt[5]{a^2b^7}}$;

17) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[4]{b^6} \cdot \sqrt[5]{a^9} \cdot \sqrt[7]{b^8} \cdot \sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[8]{b^9} \cdot \sqrt[21]{\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{a^{15}} \cdot \sqrt[12]{b^{19}} \cdot \sqrt[10]{a^{-7}} \cdot \sqrt[24]{b^5}}$;

18) $\dfrac{(-2a)^7 \cdot (3b)^{-4} \cdot (4c)^3 \cdot (-3d)^6 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{d^{-8}} \cdot \sqrt[6]{d}}{(3a)^{\overline{5}} \cdot (-2b)^{-9} \cdot (-2c)^5 \cdot (\frac{1}{4}d)^{-8} \cdot \sqrt{d} \cdot \sqrt[2]{a^5}}$;

19) $\dfrac{\sqrt[3]{18^5} \cdot \sqrt[6]{39^4} \cdot \sqrt[4]{5^7} \cdot \sqrt[3]{(5:13)^5}}{\sqrt[12]{10^5} \cdot (1:3)^{-4} \cdot \sqrt[3]{4}}$; 20) $27^{\frac{7}{12}} \cdot 21^{-\frac{3}{4}} \cdot 49^{\frac{3}{8}}$;

21) $\dfrac{\sqrt[7]{51^3} \cdot \sqrt[11]{102^5} \cdot 34^{-\frac{68}{77}}}{\sqrt[5]{24^{\frac{2}{3}}} \cdot \sqrt[11]{4^{-32}} \cdot 3^{\frac{866}{1155}}}$; 22) $2\sqrt{8} + 5\sqrt{18} - 6\sqrt{50}$;

23) $6\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{24} + 8\sqrt[6]{576}$; 24) $\dfrac{9\sqrt{7} - 18}{4\sqrt{14} - 8\sqrt{2}}$;

25) $\dfrac{4\sqrt{7} - 3\sqrt{5}}{8\sqrt{7} + 6\sqrt{5}}$; 26) $\sqrt{12 + 8\sqrt{2}}$; 27) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$;

28) $\sqrt{52 - 16\sqrt{3}}$; 29) $\sqrt{11 + \sqrt{72}}$; 30) $\sqrt{5 + \sqrt{-11}}$;

31) $\sqrt{13 - 8\sqrt{-3}}$; 32) $\dfrac{6}{1 + \sqrt{-2}}$;

33) $\dfrac{\sqrt{-12} + \sqrt{-6} + \sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}$; 34) $\dfrac{2\sqrt{3} \cdot i + \sqrt{6} \cdot i + 3i}{\sqrt{3} \cdot i}$;

35) $\dfrac{1}{3 - 2\sqrt{-3}}$; 36) $\dfrac{a + bi}{a - bi}$; 37) $\dfrac{a + bi}{a - bi} + \dfrac{a - bi}{a + bi}$;

38) $\dfrac{a + bi}{a - bi} - \dfrac{a - bi}{a + bi}$.

Auflösungen.

1) $120a^{-8}b^{4}-101a^{-7}b^{6}+69a^{-6}b^{8}-18a^{-5}b^{10}$; 2) $6x^{-5}y^{-12}+14x^{-1}y^{-10}+40x^{3}y^{-8}+24x^{7}y^{-6}+96x^{11}y^{-4}$; 3) $a^{2}x^{q-3p}+8a^{m+2}x^{q-2p}+3a^{2m+2}x^{q-p}-56a^{3m+2}x^{q}+20a^{4m+2}x^{q+p}$;

4) $a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}+3a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+6b^{\frac{5}{4}}-9b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}$; 5) $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}+2a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}-5ac^{\frac{2}{3}}$; 6) $5a^{\frac{25}{12}}-41a^{\frac{13}{12}}b+42a^{\frac{1}{12}}b^{2}$; 7) $12a^{6}b^{\frac{7}{3}}-23a^{3}b+10b^{-\frac{1}{3}}$; 8) $2a^{-1}b-3a^{-2}+5a^{-3}b^{-1}$; 9) $4x^{-5}y^{-1}-3x^{-6}+4x^{-7}y$; 10) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$; 11) $2xy^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}y$;

12) $-3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}$; 13) $3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{36}$; 14) $2+5\sqrt{2}-3\sqrt{12}$; 15) $\sqrt[6]{a^{17}}$;

16) $\sqrt[24]{ab^{3}}$; 17) ab^{2}; 18) $-\frac{2}{27}b^{5}c^{-2}d^{11}$; 19) $\frac{125}{13}\cdot\sqrt[12]{2^{7}}$; 20) $\sqrt{3}$;

21) 2; 22) $-11\sqrt{2}=-\sqrt{242}$; 23) $12\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{324}$; 24) $\frac{9}{8}\sqrt{2}$;

25) $\frac{127-24\sqrt{35}}{134}$; 26) $2+2\sqrt{2}$; 27) $3-\sqrt{5}$; 28) $2-4\sqrt{3}$;

29) $3+\sqrt{2}$; 30) $\frac{1}{2}\sqrt{22}+\frac{1}{2}\sqrt{-2}$; 31) $4-\sqrt{-3}$; 32) $2-2\sqrt{-2}$;

33) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 34) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 35) $\frac{3+2\sqrt{-3}}{21}$;

36) $\frac{a^{2}-b^{2}+2abi}{a^{2}+b^{2}}$; 37) $\frac{2a^{2}-2b^{2}}{a^{2}+b^{2}}$; 38) $\frac{4abi}{a^{2}+b^{2}}$.

Drittes Capitel.

Von den Logarithmen.

§. 28. Erklärung.

Die Zahl b durch die Zahl a logarithmiren heißt eine Zahl suchen, mit welcher man a potenziren muß, um b zu erhalten. Zur Darstellung dieser Zahl bedient man sich des Zeichens $\overset{a}{\log}\, b$. Man nennt a die Basis, b den Logarithmanden, $\overset{a}{\log}\, b$ den Logarithmen von b für die Basis a.

Ist also $a^m = b$, so ist $m = \overset{a}{\log}\, b$, und es ist

$$a^m = a^{\overset{a}{\log} b} = b.$$

Aus dieser Erklärung folgt, daß a niemals gleich 1 oder 0 sein darf, wenn b beliebige Werthe soll annehmen können. Es soll daher auch stets vorausgesetzt werden, daß a von 1 und 0 verschieden ist. Außerdem folgt aus §. 24, daß zunächst nur reelle Zahlen Logarithmen sein können.

§. 29. Erklärung.

Sind a und b absolute Zahlen, so nennt man das Zeichen $\overset{a}{\log}\, b$ einen reellen Logarithmen. In dem Folgenden soll unter einem Logarithmen immer ein reeller verstanden werden. Es ist also z. B. für die Basis 10

$$\log 100 \ \ldots = +\, 2, \text{ weil } 10^2 = 100,$$

$$\log \tfrac{1}{100} \ \ldots = -\, 2, \text{ weil } 10^{-2} = \tfrac{1}{100},$$

$$\log 3{,}162 \ldots = +\, \tfrac{1}{2}, \text{ weil } 10^{\frac{1}{2}} = 3{,}162\ldots,$$

$$\log 0{,}3162\ldots = -\, \tfrac{1}{2}, \text{ weil } 10^{-\frac{1}{2}} = 0{,}3162\ldots \text{ ist.}$$

Anm. Die Erklärung des Logarithmen wäre allgemeiner, wenn unter den Ausdrücken a und b nicht absolute, sondern reelle Zahlen verstanden werden dürften, aber diese allgemeinere Erklärung würde viele Schwierigkeiten hervorrufen. Da z. B. $64^{\frac{1}{2}} = \mp 8$ ist, so würden für die Basis 64 die beiden Zahlen $+ 8$ und $- 8$ denselben Logarithmen haben; da ferner $(\mp 8)^2 = + 64$ ist, so könnte für die Basis (∓ 8) die Zahl $- 64$ überhaupt keinen Logarithmen haben, während sie hingegen für die Basis $- 4$ den Logarithmen $+ 3$ hätte.

§. 30. Zusatz.

Bezeichnen a und b in der Gleichung $a^m = b$ absolute Zahlen, so giebt es stets einen reellen Werth von $m = \overset{a}{\log}\, b$, welcher dieser Gleichung genügt. In der Reihe

$$\ldots\ldots a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{-0}, a^1, a^2, a^3, a^4, \ldots\ldots$$

die man sich nach beiden Seiten bis ins Unendliche fortgesetzt denken mag, nähern sich die Glieder auf der einen Seite dem unendlich Großen, auf der andern dem unendlich Kleinen. Es muß also b entweder selbst ein Glied dieser Reihe sein, oder es muß der Größe nach zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern liegen. Liegt nun z. B. die Zahl $b = a^m$ zwischen den Gliedern a^v und a^{v+1}, so liegt ihr Logarithme m zwischen den Zahlen v und v + 1, und zwischen denselben muß eine (irrationale) Zahl wenigstens gedacht werden können, welche der Bedeutung von m entspricht. Mehr als einen Werth kann aber m nicht haben. (Vergl. §. 8.)

Anm. Der Name „Logarithmus" läßt sich durch „Verhältnißzähler" übersetzen. Nennt man nämlich die Ausdrücke (a : b), $(a^2 : b^2)$, $(a^m : b^m)$ das erste, zweite, m^{te} Verhältniß der Zahlen a und b, so bezeichnet jedesmal der Exponent (Logarithme) die Zahl des Verhältnisses.

§. 31. Zusatz.

Aus den vorigen §§. ergeben sich für die reellen Logarithmen folgende Sätze:

1) Jede positive Zahl hat einen Logarithmen.
2) Die negativen Zahlen haben keine Logarithmen.
3) Die Logarithmen der meisten Zahlen sind irrational.
4) Der Logarithme von 1 ist für jede Basis gleich Null.
5) Die Logarithmen der ächten Brüche sind für eine Basis, welche größer als 1 ist, negativ; umgekehrt sind es die Logarithmen der unächten Brüche und ganzen Zahlen für eine Basis, welche kleiner als 1 ist.

§. 32. Grundsatz.

Gleiches durch Gleiches logarithmirt giebt Gleiches, oder:

1) Ist a = b, so ist auch $\overset{m}{\log}\, a = \overset{m}{\log}\, b$.

2) Ist $\overset{m}{\log}\, a = \overset{m}{\log}\, b$, so ist auch a = b.

3) Ist $a^m = a^n$, so ist auch m = n.

§. 33. Lehrsätze.

Es sei m die Basis der nachfolgenden Logarithmen, so ist:

1) $\log(a.b) = \log a + \log b;$

2) $\log(a:b) = \log a - \log b;$

3) $\log(1:b) = -\log b;$

4) $\log a^{b}$*) $= (\log a).b;$

5) $\log \sqrt[b]{a} = (\log a):b;$

6) $\log(a \mp b) = \log(a \mp b).$

Beweis zu 1. Es ist $m^{\log(ab)} = ab$, ferner auch

$$m^{\log a + \log b} = m^{\log a}.m^{\log b} = ab.$$

Beweis zu 2. Er wird ebenso geführt.

Beweis zu 3. Er folgt aus 2 und aus §. 31, 4.

Beweis zu 4. Es ist $m^{\log(a^{b})} = a^{b}$; ferner auch

$$m^{(\log a)b} = (m^{\log a})^{b} = a^{b}.$$

Beweis zu 5. Er folgt aus 4, wenn man $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$ setzt.

§. 34. Zusatz.

Nach vorigem §. findet man den Logarithmen:

1) eines Produkts, wenn man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addirt;

2) eines Quotienten, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem des Dividenden subtrahirt;

3) einer Potenz, wenn man den Logarithmen des Dignanden mit dem Exponenten multiplicirt;

4) einer Wurzel, wenn man den Logarithmen des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividirt.

Anm. Der Logarithme einer Summe (Differenz) läßt sich nicht durch die Logarithmen der einzelnen Summanden bezeichnen.

---

*) b bedeutet eine reelle Zahl. Ist b gebrochen, so ist a^{b} eindeutig zu nehmen.

§. 35. Lehrsatz.

Hat eine Zahl b den Logarithmen m für die Basis a, ferner den Logarithmen M für die Basis A, ist also $b = a^m = A^M$, so ist $M = m : \overset{a}{\log} A$.

Beweis. Es ist $a^m = A^M$.

Bezeichnet man nun $\overset{a}{\log} A$ durch x, so ist $A = a^x$,

also $a^m = A^M = (a^x)^M = a^{xM}$.

Es ist folglich $Mx = m$, daher

$$M = m : x = m : \overset{a}{\log} A.$$

Anm. Sind die Logarithmen aller Zahlen für eine bestimmte Basis a bekannt, so erhält man die Logarithmen für eine andere Basis A, indem man die ersteren durch den (bekannten) Logarithmen von A dividirt.

§. 36. Erklärung.

Die für eine bestimmte Basis berechneten Logarithmen der (absoluten) Zahlen bilden ein Logarithmensystem, ihre Zusammenstellung eine Logarithmentafel. Das gebräuchlichste System hat die Basis 10 und wird das Brigg'sche (vulgäre) genannt. Neben demselben giebt es noch ein zweites, das der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen. Die Basis desselben ist die Irrationalzahl 2,71828..., welche durch Berechnung der Summe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$ in inf. (d. h. bis in's Unendliche) erhalten wird.

Den Brigg'schen Logarithmen einer Zahl a bezeichnet man durch log. a, den natürlichen durch log. nat. a oder Log. a.

Anm. 1. Die ersten Logarithmentafeln von Bedeutung sind die des Schotten Johann Neper, der eine Tafel der natürlichen Logarithmen im Jahre 1612, und die des Oxforder Professors Heinrich Brigg, der seine Tafel im Jahre 1624 herausgab. Eine besondere Verbreitung erhielten später die Tafeln von Sherwin (1706), von Callet (1783), von Vega (1783), welche letzteren von Hülsse, Bremiker und Schrön neu herausgegeben worden sind.

Anm. 2. Die Brigg'schen Logarithmen lassen sich dadurch bestimmen, daß man in der Gleichung $10^m = b$ für m beliebige Zahlen einsetzt und die zugehörigen Werthe von b berechnet. Man sucht also zu einem gegebenen Logarithmus den Logarithmanden und erhält denselben im Allgemeinen durch fortgesetztes Radiziren. So ist z. B.

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10} = 3{,}1622\ldots, \text{ daher } \log 3{,}1622\ldots = 0{,}5;$$

$$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{3{,}1622\ldots} = 1{,}3335\ldots, \text{ daher } \log 1{,}3335\ldots = 0{,}125;$$

$$10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} = 2{,}1544\ldots, \text{ daher } \log 2{,}1544\ldots = 0{,}333333\ldots$$

Diese Art der Berechnung ist die ursprüngliche; sie ist leicht verständlich, aber überaus mühsam. Die umgekehrte Aufgabe, zu einem gegebenen Logarithmanden den Logarithmen zu berechnen, führt schneller zum Ziele, kann aber erst in einem späteren Capitel behandelt werden.

§. 37. Erklärung.

Jeder Logarithme besteht aus einer ganzen Zahl, der Kennziffer oder Characteristik, und einem (irrationalen) Decimalbruche, der Mantisse, welche beiden Theile natürlich auch den Werth Null haben können. Logarithmanden, welche sich nur durch ihre Rangordnung im dekadischen System, also äußerlich nur durch die Stellung des Komma und die zu Anfang oder zu Ende stehenden Nullen von einander unterscheiden, müssen ein und dieselbe Mantisse haben; denn wenn $\log a = m$ ist, so ist $\log 10a = 1 + m$, $\log 100a = 2 + m$, $\log (a : 10) = -1 + m$, $\log (a : 100) = -2 + m$ u. s. w. Es haben also z. B. die Logarithmen der Zahlen 0,0003; 0,003; 0,03; 3; 30; 300; 3000; u. s. w. die nämliche Mantisse, aber verschiedene Kennziffern. Die Bestimmung der letztern ist jedoch leicht.

Da nämlich zu den Logarithmanden

$$\ldots 0{,}0001;\ 0{,}001;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ \ldots$$

die Logarithmen

$$\ldots\ldots -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ +1;\ +2;\ +3;\ \ldots$$

gehören, so hat folglich eine mstellige ganze Zahl, (die auch mit einem Decimalbruch verbunden sein kann), die Kennziffer $+ (m - 1)$, hingegen ein (ächter) Decimalbruch, bei dem die m ersten Stellen nach dem Komma durch Nullen ausgefüllt sind, die Kennziffer $- (m + 1)$.

In den üblichen Tafeln findet man daher auch nur die Mantissen, z. B. für den Logarithmanden 8651 die Mantisse 9370663. Es ist aber nach dem Gesagten:

$$\log 8651 = 3{,}9370663;\ \log 0{,}8651 = -1 + 0{,}9370663;$$

$$\log 86{,}51 = 1{,}9370663;\ \log 0{,}08651 = -2 + 0{,}9370663.$$

Umgekehrt giebt die Kennziffer $+ m$ eines (bekannten) Logarithmen an, daß der (unbekannte) Logarithmand größer als 1 sei, und daß die ganze Zahl desselben aus $m + 1$ Ziffern bestehe; ferner die Kennziffer $- m$, daß der Logarithmand ein (ächter) Decimalbruch sei, und daß die $(m - 1)$ ersten Stellen nach dem Komma durch Nullen ausgefüllt sind. Wenn man daher in den Tafeln z. B. zu der Mantisse 30103 den Logarithmanden 2 findet, so gehören zu den Logarithmen

3,30103; 0,30103; $-2+0,30103$; u. s. w.

die Logarithmanden

2000 ; 2 ; 0,02.

Anm. Den üblichen Logarithmentafeln ist eine ausführliche Anleitung zum Gebrauche derselben beigefügt.

§. 38. Zusatz.

Die Logarithmentafeln sind für viele Rechnungen ein unentbehrliches Hülfsmittel. Sobald man nämlich von einem Zahlenausdrucke, dessen Berechnung nach gewöhnlicher Art entweder schwierig oder unmöglich sein würde, nur den Logarithmen zu bestimmen vermag, so ist dadurch auch der Ausdruck selbst bestimmt. Die Art und Weise der logarithmischen Berechnung wird sich leicht aus den nachstehenden Beispielen erkennen lassen.

I. Den Ausdruck $x = \frac{3{,}0234 \,.\, 0{,}63782}{0{,}136052}$ zu berechnen.

Auflös. Es ist

$$\log x = \log 3{,}0234 + \log 0{,}63782 - \log 0{,}136052$$
$$= 0{,}4804956 + (0{,}8046913-1)-(0{,}1337049-1)$$
$$= 1{,}1514820,$$

daher $x = 14{,}173\ldots\ldots$

II. Den Ausdruck $x = (1{,}038)^{20}$ zu berechnen.

Auflös. Es ist $\log x = 20 . \log 1{,}038 = 20 . 0{,}0161974$, oder

$$\log x = 0{,}323948;$$

daher $x = 2{,}1083\ldots$

III. Den Ausdruck $x = \sqrt[20]{0{,}4}$ zu berechnen.

Auflös. Es ist $\log x = (\log 0{,}4):20 = (0{,}6020600-1):20$, oder

$$\log x = (19{,}6020600-20):20 = 0{,}9801030-1,$$

daher $x = 0{,}955219\ldots.$

IV. Die Gleichung $14^x = 19$ nach x aufzulösen.

Auflöſ. Es iſt $x \,.\, \log 14 = \log 19$,

daher $x = \log 19 : \log 14$

$= 1{,}2787536 : 1{,}1461280$

$= 1{,}1157\ldots.$

V. Die Gleichung $\frac{15 \,.\, (3{,}02)^x}{7{,}803} = (6{,}02)^7$ nach x aufzulöſen.

Auflöſ. Es iſt $x \log 3{,}02 + \log 15 - \log 7{,}803 = 7 \,.\, \log 6{,}02$,

daher $x = (7 \,.\, \log 6{,}02 + \log 7{,}803 - \log 15) : \log 3{,}02$

$= (7 \,.\, 0{,}7795965 + 0{,}8922616 - 1{,}1760913) : 0{,}4800069$

$= 10{,}777\ldots.$

Aufgaben.

I. Folgende Ausdrücke zu berechnen:

1) $\sqrt[7]{8}$; 2) $\sqrt[12]{567348}$; 3) $\sqrt[13]{\frac{3348}{569}}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}26 \,.\, \sqrt{2:3}}$;

5) $(\frac{5}{7})^{0{,}0537}$; 6) $\frac{(991{,}767)^5 \,.\, 12{,}34}{(20{,}358 \,.\, 10{,}1575)^6}$;

7) $\sqrt[35]{136} \,.\, \sqrt[5]{3425 : 0{,}00034}$; 8) $\sqrt[8]{\left(\frac{27{,}51 \,.\, 61593}{316{,}57 \,.\, 4817}\right)^3}$.

II. Folgende Gleichungen nach x aufzulöſen:

9) $2^x = 65536$; 10) $(\frac{3}{4})^x = 51\frac{1}{3}$; 11) $3^{2x} \,.\, 5^{6x-7} = 9^{x-2} \,.\, 7^{1-x}$;

12) $(\frac{21}{20})^x \,.\, (\frac{3}{5})^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}$.

Auflöſungen.

1) 1,345900....; 2) 3,016389....; 3) 1,146055....; 4) 0,596556...; 5) 0,982093....; 6) 151,4369....; 7) 28,94639....; 8) 0,228563....; 9) 16; 10) —13,689....; 11) 0,81707....; 12) 0,309928.....

Viertes Capitel.

Von den Progressionen.

§. 39. Erklärung.

Eine Reihe von Ausdrücken heißt eine arithmetische Progression, wenn je zwei aufeinanderfolgende Glieder denselben Unterschied, sie heißt eine geometrische Progression, wenn je zwei aufeinanderfolgende Glieder dasselbe Verhältniß haben.

Die arithmetische Progression hat die Form

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \ldots.$$

Den Ausdruck d nennt man den Unterschied dieser Reihe. Dieselbe heißt steigend, wenn d positiv, fallend, wenn d negativ ist.

Die geometrische Progression hat die Form

$$a, \quad a \cdot d, \quad a \cdot d^2, \quad a \cdot d^3, \ldots.$$

Den Ausdruck d nennt man den Exponenten dieser Reihe. Dieselbe heißt steigend, wenn $d > 1$, fallend, wenn $d < 1$ ist.

In den nachfolgenden §§. bezeichnet a das erste, u das letzte Glied einer beliebigen Progression, n die Anzahl, s die Summe der Glieder, d den Unterschied, oder den Exponenten.

A. Von den arithmetischen Progressionen.

§. 40. Lehrsätze.

$$1)\ u = a + (n-1)\, d;$$

$$2)\ s = \frac{(a+u) \cdot n}{2}.$$

Beweis zu 1. Es ist a das erste, $(a+d)$ das zweite, $(a+2d)$ das dritte, also $a+(n-1)d$ das n^{te} Glied.

Beweis zu 2. Es ist $s = a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(u-d)+u$;

oder auch $s = u+(u-d)+(u-2d)+\ldots+(a+d)+a$.

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man:

$$2s = (a+u)+(a+u)+(a+u)+\ldots\ldots+(a+u)$$
$$= (a+u) \cdot n,$$

daher $s = \dfrac{(a+u) \cdot n}{2}$.

§. 41. Aufgaben.

I. Die Summe der ganzen Zahlen von 1 bis 1000 zu bestimmen.

Auflösung. Die Zahlen von 1 bis 1000 bilden eine arithmetische Progression; bei derselben ist $a = 1$; $n = 1000$; $u = 1000$,

$$\text{daher } s = \frac{(1+1000) . 1000}{2} = 500500.$$

II. Die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 999 zu bestimmen.

Auflösung. Es ist $a = 1$; $n = 500$; $u = 999$, daher

$$s = \frac{(1+999) . 500}{2} = 250000.$$

III. Die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $(2x + 1)$ zu bestimmen.

Auflösung. Es ist $a = 1$; $n = x+1$; $u = 2x+1$, daher

$$s = \frac{(1+2x+1) . (x+1)}{2} = (x+1)^2.$$

IV. Die Summe der Zahlen zu bestimmen, welche zwischen 100 und 200 liegen und durch 3 theilbar sind.

Auflösung. Es ist $a = 102$,

$$u = 198 = 102+96 = 102+32 . 3,$$

$$\text{also } n = 33,$$

$$\text{daher } s = \frac{(102+198)}{2} . 33 = 4950.$$

§. 42. Zusatz.

Aus den zwei Gleichungen

$$1) \quad u = a+(n-1)d,$$

$$2) \quad s = \frac{(a+u) . n}{2}$$

erhält man, wenn man mit Hülfe von 1) entweder a, oder u, oder n eliminirt, noch folgende Gleichungen:

$$3) \quad s = \left[2u-(n-1)d\right] \cdot \frac{n}{2};$$

$$4)\quad s = \frac{(u-a+d)(u+a)}{2d};$$

$$5)\quad s = \left[2a+(n-1)d\right] \cdot \frac{n}{2}.$$

§. 43. Zusatz.

Löst man die in §. 42 aufgestellten fünf Gleichungen nach jedem der in ihnen vorkommenden Buchstaben auf, so erhält man noch funfzehn neue Gleichungen. Diese zwanzig Gleichungen geben eine vollständige Lösung der Aufgabe, je eine der Zahlen a, u, n, s, d durch drei der andern auszudrücken, wie es für die Zahl s bereits in §. 42, 2—5 geschehen ist. Die übrigen sechszehn Gleichungen lassen sich in folgender Art zusammenstellen:

$$1)\quad u = a + (n-1)d;$$

$$2)\quad u = \frac{2s-na}{n};$$

$$3)\quad u = \frac{-d \mp \sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2};$$

$$4)\quad u = \frac{2s+n(u-1)d}{2n};$$

$$5)\quad a = u-(n-1)d;$$

$$6)\quad a = \frac{d \mp \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2};$$

$$7)\quad a = \frac{2s-n(n-1)d}{2n};$$

$$8)\quad a = \frac{2s-nu}{n};$$

$$9)\quad d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)};$$

$$10)\quad d = \frac{(u+a)(u-a)}{2s-(u+a)};$$

$$11)\quad d = \frac{2(nu-s)}{n(n-1)};$$

$$12)\quad d = \frac{u-a}{n-1};$$

$$13)\quad n = \frac{u-a+d}{d};$$

$$14)\quad n = \frac{2s}{a+u};$$

$$15)\quad n = \frac{-(2a-d) \mp \sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2d};$$

$$16)\quad n = \frac{2u+d \mp \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2d}.$$

B. Von den geometrischen Progressionen.

§. 44. Lehrsätze.

$$1)\ u = a \,.\, d^{n-1};$$

$$2)\ s = a \,.\, \frac{d^n - 1}{d - 1}.$$

Beweis zu 1. Das erste Glied ist a, das zweite $a.d$, das dritte $a.d^2$, also das n^{te} = $a.d^{n-1}$.

Beweis zu 2. Es ist

$$s = a + ad + ad^2 + \ldots\ldots + ad^{n-1}$$

$$ds = ad + ad^2 + \ldots\ldots + ad^{n-1} + ad^n,$$

folglich $ds - s = ad^n - a$,

$$s = a \,.\, \frac{d^n - 1}{d - 1}.$$

Anm. Ist $d = 1$, so ist $a \,.\, \frac{d^n - 1}{d - 1} = a . \frac{0}{0}$. Für diesen Fall erhält man aber unmittelbar $s = a.n$.

§. 45. Zusatz.

Ist in einer geometrischen Progression $n = \infty$ (d. h. unendlich groß), so ist $s = a \,.\, \frac{d^\infty - 1}{d - 1}$. Nun ist (Vergl. Arithm. I, §. 92):

1) $d^\infty = \infty$, wenn $d > 1$, hingegen
2) $d^\infty = 0$, wenn $d < 1$ ist.

In ersterem Falle ist daher $s = \infty$, in letzterem hingegen

$$s = -\frac{a}{d-1} = \frac{a}{1-d}.$$

Es ist also z. B.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2;$$

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \ \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2};$$

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

§. 46. Zusatz.

Aus den zwei Gleichungen

$$1)\ u = a \,.\, d^{n-1},$$

$$2)\ s = a \,.\, \frac{d^n - 1}{d - 1}$$

erhält man, wenn man mit Hülfe von 1) entweder a, oder n, oder u eliminirt, noch folgende drei Gleichungen:

$$3)\ u = (du + s - ds) \,.\, d^{n-1};$$

$$4)\ u = \frac{(d-1) \,.\, s + a}{d};$$

$$5)\ u = a \,.\, \left(\frac{s-a}{s-u}\right)^{n-1}.$$

Diese fünf Gleichungen lassen sich leicht nach jedem der in ihnen vorkommenden Buchstaben auflösen (Vergl. §. 43). In Bezug auf n sind dieselben aber transcendent, und man muß daher z. B. aus 1) erst die logarithmische Gleichung

$$\log u = \log a + (n - 1) \log d$$

bilden, um aus derselben die Lösung zu erhalten:

$$n = (\log u - \log a + \log d) : \log d.$$

C. Von der Interpolation.

§. 47. Erklärung.

Soll aus einer gegebenen Progression eine neue gebildet werden, welche zwischen je zwei Gliedern der ersteren noch fernere m Glieder enthält, so werden diese m Glieder eingeschaltet oder interpolirt. Man verfährt dabei folgendermaßen:

1) Ist die arithmetische Progression

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots\ldots$$

gegeben, und sollen zwischen a und $(a + d)$ noch m Glieder interpolirt werden, so hat man den Unterschied δ dieser Glieder zu bestimmen. Nun bilden die interpolirten Glieder zusammen mit a und $(a + d)$ eine Progression von $m + 2$ Gliedern, und es ist daher (nach §. 40, 1)

$$(a + d) = a + (m + 1)\delta, \text{ folglich } \delta = \frac{d}{m + 1}.$$

Für die Progression 3, 7, 11, 15... ist $d = 4$. Um also z. B. je vier Glieder zu interpoliren, setzt man $\delta = d:(m+1) = 4:5$ und erhält die neue Reihe

$$3,\ 3\tfrac{4}{5},\ 4\tfrac{3}{5},\ 5\tfrac{2}{5},\ 6\tfrac{1}{5},\ 7,\ 7\tfrac{4}{5},\ \ldots.$$

2) Ist die geometrische Progression

$$a,\ a.d,\ a.d^2 \ldots.$$

gegeben, und sollen zwischen a und ad noch m Glieder interpolirt werden, so hat man den Exponenten δ dieser Glieder zu bestimmen. Diese bilden mit a und ad eine Progression von $m+2$ Gliedern, und es ist daher (nach §. 44, 1)

$$ad = a.\delta^{m+1}, \text{ folglich}$$

$$\delta = \sqrt[m+1]{d}.$$

Für die Progression 4, 8, 16, ... ist $d = 2$. Um also z. B. je drei Glieder zu interpoliren, setzt man

$$\delta = \sqrt[m+1]{d} = \sqrt[4]{2} \text{ und erhält die neue Reihe}$$

$$4,\ 4\sqrt[4]{2},\ 4\sqrt[4]{4},\ 4\sqrt[4]{8},\ 8,\ 8\sqrt[4]{2},\ \ldots$$

Anm. Es sind hierbei die günstigsten Bedingungen zur Ausführung der Interpolation gewählt. Dieselbe ist weniger einfach, wenn nicht die Progression selbst, sondern nur drei der Zahlen a, u, n, s, d gegeben sind. Die Bedeutung der Interpolation ist außerdem eine viel weitere. Man kann auch bei Reihen, die nicht Progressionen sind, Glieder interpoliren, so daß sie nach demselben Gesetz gebildet werden, wie die Glieder der betreffenden Reihe, doch muß in solchen Fällen ein anderes Verfahren stattfinden.

§. 48. Zusatz.

Die beiden Progressionen

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5, \ldots$$
$$10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ 100000, \ldots$$

correspondiren mit einander, da die Glieder der ersteren zugleich Logarithmen für die entsprechenden Glieder der anderen sind. Interpolirt man nun in beiden Reihen an correspondirenden Stellen m neue Glieder, so erhält man m neue Logarithmen (Vergl. §. 36, Anm. 2). Es muß jedoch der Werth von m so gewählt werden, daß sich der Ausdruck $\sqrt[m+1]{d}$ berechnen läßt; es muß also der Wurzelexponent $m+1$ der Form $2^x \,.\, 3^y$ entsprechen (Arithm. I, §. 112).

Aufgaben.

I. Aus drei gegebenen Stücken einer Progression die übrigen zu berechnen.

1) Arithmetische Progression. Es ist gegeben:

1) $a = 3$; $d = 5$; $n = 68$;
2) $a = -5$; $d = 2$; $n = 7$;
3) $a = 5$; $d = 2$; $u = 41$;
4) $a = -4\frac{1}{2}$; $d = 1\frac{1}{2}$; $u = 33$;
5) $a = 2$; $d = 3$; $s = 187$;
6) $a = -\frac{3}{4}$; $d = -\frac{7}{8}$; $s = -281\frac{1}{4}$;
7) $d = 3$; $n = 8$; $u = 43$;
8) $d = \frac{1}{2}$; $n = 11$; $u = 5$;
9) $d = 2$; $n = 5$; $s = 115$;
10) $d = \frac{1}{3}$; $n = 100$; $s = 1900$;
11) $n = 17$; $u = 50$; $s = 442$;
12) $n = 6$; $u = -20$; $s = -90$.

2) Geometrische Progression. Es ist gegeben:

13) $a = 1$; $d = 2$; $n = 7$;
14) $a = 6\frac{1}{4}$; $d = \frac{3}{2}$; $n = 8$;
15) $d = 3$; $n = 10$; $u = 78732$;
16) $d = 4$; $n = 9$; $u = 327680$;
17) $d = 5$; $n = 8$; $s = 97656$;
18) $a = 2$; $d = 3$; $u = 486$;
19) $a = 2$; $d = \frac{1}{2}$; $u = \frac{1}{32}$;
20) $a = \frac{1}{2}$; $u = 40\frac{1}{2}$; $s = 60\frac{1}{2}$;
21) $a = 1\frac{1}{2}$; $u = 96$; $s = 127\frac{1}{2}$.

II. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern einer Progression m neue Glieder zu interpoliren.

1) Arithmetische Progression.

22) 3 Glieder zwischen 20 und 30; 23) 4 Glieder zwischen $12\frac{1}{2}$ und 18;
24) 7 Glieder zwischen -16 und 8.

2) Geometrische Progression.

25) 3 Glieder zwischen 5 und 405; **26)** 4 Glieder zwischen 4 und $\frac{1}{8}$;
27) 5 Glieder zwischen $\frac{7}{9}$ und 567.

III. Zusammengesetzte Aufgaben.

28) Bei einer arithmetischen Progression von 4 Gliedern ist $d = 2$; das Produkt der vier Glieder ist 945. Welche Progression ist es?

29) Bei einer arithmetischen Progression von 4 Gliedern ist d gegeben und das Produkt p der vier Glieder. Welche Progression ist es?

30) Bei einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist die Summe der geraden Glieder $= 780$, die Summe der ungeraden $= 156$. Welche Progression ist es?

31) Bei einer geometrischen Progression von 5 Gliedern ist die Summe der geraden Glieder $= 3\frac{1}{3}$, die Summe der ungeraden $= 10\frac{1}{9}$. Welche Progression ist es?

32) Bei einer geometrischen Progression ist die Summe der Glieder $= 31$, die Summe der Quadrate derselben $= 341$, die Summe der Kuben $= 4681$. Welche Progression ist es?

33) Bei einer geometrischen Progression ist die Summe der Glieder $= 15$, die Summe der Quadrate derselben $= 85$, die Summe der Biquadrate $= 4369$. Welche Progression ist es?

Auflösungen.

1) $u = 338$; $s = 11594$; **2)** $u = 7$; $s = 7$; **3)** $n = 19$; $s = 437$; **4)** $n = 26$; $s = 370\frac{1}{2}$; **5)** $n = 11$; $u = 32$; **6)** $n = 25$; $u = -21\frac{3}{4}$; **7)** $a = 22$; $s = 260$; **8)** $a = 0$; $s = 27\frac{1}{2}$; **9)** $a = 19$; $u = 27$; **10)** $a = 2\frac{1}{2}$; $u = 35\frac{1}{2}$; **11)** $a = 2$; $d = 3$; **12)** $a = -10$; $d = -2$; **13)** $u = 64$; $s = 127$; **14)** $u = 106\frac{403}{512}$; $s = 307\frac{441}{512}$; **15)** $a = 4$; $s = 118096$; **16)** $a = 5$; $s = 436905$; **17)** $a = 1$; $u = 78125$; **18)** $n = 6$; $s = 728$; **19)** $n = 7$; $s = 3\frac{31}{32}$; **20)** $d = 3$; $n = 5$; **21)** $d = 4$; $n = 4$; **22)** $d = 2\frac{1}{2}$; **23)** $d = 1\frac{1}{10}$; **24)** $d = 3$; **25)** $d = 3$; **26)** $d = \frac{1}{2}$; **27)** $d = 3$; **28)** $a = 3$; **29)** $a = \frac{1}{2}(-3d \mp \sqrt{5d^2 \mp 4\sqrt{p + d^4}}$; **30)** $a = 6$; $d = 5$; **31)** $a = 9$; $d = \frac{1}{3}$; **32)** $a = 1$; $d = 2$; $n = 5$; **33)** $a = 1$; $d = 2$; $n = 4$.

Anhang zu den Capiteln III. und IV.

Von der zusammengesetzten Zinsrechnung.

Erklärung. Die zusammengesetzte Zinsrechnung unterscheidet sich von der einfachen dadurch, daß bei ersterer die fälligen Zinsen sogleich als Kapital auftreten und ebenfalls Zinsen bringen. Sie zerfällt in Zinseszins- und Rentenrechnung.

A. Von der Zinseszinsrechnung.

Aufgabe I. Die Summe C Thlr. zu bestimmen, zu welcher ein Kapital von c Thlr. bei p % in t Jahren anwächst.

Auflösung. Bei p % bringt 1 Thlr. jährlich $\frac{p}{100}$ Thlr. Zinsen, wächst also in einem Jahre zu $1 + \frac{p}{100} = \frac{100 + p}{100}$ Thlr. an; ein Kapital von c Thlr. beträgt daher nach einem Jahre mit seinen Zinsen zusammen $c \cdot \frac{100 + p}{100}$ Thlr. Letzteres Kapital erfährt im folgenden Jahre

dieselbe verhältnißmäßige Vergrößerung und beträgt zu Ende desselben (also des zweiten Jahres) $c . \left(\frac{100+p}{100}\right)^2$, aus demselben Grunde zu Ende des dritten Jahres $c . \left(\frac{100+p}{100}\right)^3$, ferner zu Ende des t^{ten} Jahres $c . \left(\frac{100+p}{100}\right)^t$. Es ist also

$$C = c . \left(\frac{100+p}{100}\right)^t.$$

Aus dieser Gleichung erhält man aber die nachstehenden logarithmischen Gleichungen, mit deren Hülfe man aus je drei der erwähnten Größen die vierte bestimmen kann:

$$1)\ \log C = \log c + t . \log \frac{100+p}{100};$$

$$2)\ \log c = \log C - t . \log \frac{100+p}{100};$$

$$3)\ \log \frac{100+p}{100} = \frac{\log C - \log c}{t};$$

$$4)\ t = (\log C - \log c) : \log \frac{100+p}{100}.$$

Beispiel 1. Zu welcher Summe wachsen 6200 Thlr. bei 4 % nach 8 Jahren an?

Auflösung. Es ist $\log C = \log 6200 + 8 . \log 1{,}04$;

oder $\log C = 3{,}7923917 + 8 . 0{,}0170333$

$= 3{,}9286581$;

daher $C = 8485{,}12\ldots$ Thlr.

Beispiel 2. Bei wie viel % wachsen 8450 Thlr. in 9 Jahren auf 12500 Thlr. an?

Auflös. Es ist $\log \frac{100+p}{100} = (\log 12500 - \log 8450) : 9$

$= (4{,}0969100 - 3{,}9268567) : 9$

$= 0{,}0188948$;

daher $100 + p = 104{,}44\cdots$

$p = 4{,}44\cdots$

Beispiel 3. Nach welcher Zeit hat sich ein zu 4 % stehendes Kapital verdoppelt?

Auflösung. Es ist $t = (\log 2c - \log c) : \log 1{,}04$

$$= \log 2 : \log 1{,}04$$
$$= 0{,}3010300 : 0{,}0170333$$
$$= 17{,}67 \cdots\cdots$$

Anm. Nach den gegebenen Gleichungen berechnet man auch die Zunahme der Bevölkerung, die Werthzunahme eines Forstreviers u. dergl.

Aufgabe II. Es werden c Thlr. zu p % auf Zinsen gegeben, und jährlich zum Kapital die Zinsen, aber außerdem noch d Thlr. hinzugefügt. Wie groß ist das Kapital zu Ende des t^{ten} Jahres, wenn zu Ende desselben die erwähnten d Thaler ebenfalls noch hinzukommen?

Auflösung. Es sind folgende einzelne Aufgaben zu lösen:

Zu welcher Summe wachsen bei p % mit Zinseszinsen an:

1) c Thlr. in t Jahren? 2) d Thlr. in t—1 Jahren?
3) d Thlr. in t—2 Jahren? 4) d Thlr. in t—3 Jahren?
u. s. w.
t) d Thlr. in 1 Jahre? t + 1) d Thlr. in 0 Jahren?

Die Summe der einzelnen Lösungen ist gleich dem gesuchten Kapitale (C), und man erhält also (nach I):

$$C = c.\left(\frac{100+p}{100}\right)^t + d\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^{t-1} + d\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^{t-2}$$
$$+ d\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^{t-3} + \cdots + d\cdot\frac{100+p}{100}\cdot + d,$$
$$= c.\left(\frac{100+p}{100}\right)^t + d.\left\{\frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^t - 1}{\frac{100+p}{100} - 1}\right\} \text{ (nach §. 44)}$$
$$= c.\left(\frac{100+p}{100}\right)^t + \frac{100d}{p}\cdot\left\{\left(\frac{100+p}{100}\right)^t - 1\right\}.$$

Eine allgemeine logarithmische Gleichung ist hier nicht möglich. Wird C gesucht, so berechnet man die beiden Glieder auf der rechten Seite einzeln mit Hülfe der Logarithmen und addirt sie alsdann; ebenso ist die

Berechnung leicht auszuführen, wenn c, oder d, oder t gesucht werden. Die Größe von p kann nur durch Probiren annähernd bestimmt werden.

Würden jährlich nicht d Thlr. hinzugefügt, sondern weggenommen, so wäre d negativ in Rechnung zu bringen.

Beispiel 4. Jemand hat 8000 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ % angelegt und vermehrt das Kapital jährlich um die fälligen Zinsen und um 300 Thlr. Welchen Betrag hat dasselbe zu Ende des zehnten Jahres?

Auflös. Es ist $C = 8000.(1,045)^{10} + \frac{100.300}{4,5}\left\{(1,045)^{10} - 1\right\}$

$$= \left(8000 + \frac{100.300}{4,5}\right)\cdot\left(1,045\right)^{10} - \frac{100.300}{4,5}$$

$$= \left[44000 \cdot (1,045)^{10} - 20000\right] : 3.$$

Nun ist $\log \left\{ 4400 \cdot (1,045)^{10} \right\} = 4,8346157,$

daher $44000 \cdot (1,045)^{10} = 68330,69 \cdots;$

folglich ist $C = 16110,23 \cdots$

Beispiel 5. Jemand hat 17500 Thlr. Schulden, die zu 4 % stehen. Jährlich zahlt er 1100 Thlr. zurück. Wann ist die Schuld abgetragen?

Auflösung. Es ist $0 = 17500(1,04)^t - 27500\left\{(1,04)^t - 1\right\}$

$$= -10000\,(1,04)^t + 27500,$$

daher $(1,04)^t = 2,75,$

$$t = \log 2,75 : \log 1,04$$

$$= 0,4393327 : 0,0170333$$

$$= 25,79 \cdots$$

B. Von der Rentenrechnung.

Erklärung. Unter einer Rente versteht man eine bestimmte Summe, die Jemand in regelmäßigen Terminen bezahlt, um dadurch eine Schuld nach und nach abzutragen. Kauft Jemand eine Rente, so wird ihm in regelmäßigen Terminen eine gewisse Summe ausgezahlt. Die Kaufsumme heißt die Mise. Eine Rente heißt beständig, wenn die Terminzahlungen immer dieselbe Größe haben; im entgegengesetzten Falle ist sie veränderlich.

Eine Leib- oder Lebensrente wird bis zum Tode des Rentiers bezahlt; für die wahrscheinliche Lebensdauer hat man in solchen Fällen Tabellen, denen langjährige Beobachtungen zu Grunde liegen.

Aufgabe III. Den Werth der Mise M zu bestimmen, wenn t Jahre lang die Rente r zu Ende eines jeden Jahres gezahlt wird, und p $\frac{0}{0}$ gerechnet werden.

Auflösung. Es muß M einen solchen Werth haben, daß es nach t Jahren bei p $\frac{0}{0}$ mit Zins und Zinseszins zu derselben Summe anwächst, zu welcher die einzelnen Zahlungen mit Zins und Zinseszins bis zu Ende des t^{ten} Jahres zusammen angewachsen sein würden.

Nun beträgt M nach t Jahren: $M\left(\frac{100+p}{100}\right)^t$ (Aufgabe I).

Die Summe der einzelnen Zahlungen r beträgt zu Ende des t^{ten} Jahres:

$$\frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{100+p}{100}\right)^t - 1\right\} \quad \text{(Aufgabe II).}$$

Es ist folglich

$$M \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^t = \frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{100+p}{100}\right)^t - 1\right\},$$

$$\text{daher } M = \frac{100r}{p}\left\{1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^t\right\}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Werthe von M, r, t numerisch mit Hülfe der Logarithmen bestimmen; der Werth von p ist nur durch Probiren annähernd zu finden.

Beispiel 6. Gegeben ist r=800; t=20; p=4. Gesucht wird M.

Auflösung. Es ist $M = 20000\left\{1 - \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{20}\right\}$

$$= 20000 - [20000 : (1{,}04)^{20}].$$

Nun ist $\log [20000:(1{,}04)^{20}] = 3{,}9603640,$

$$20000 : (1{,}04)^{20} = 9127{,}7\cdots\cdots$$

$$\text{daher } M = 10872{,}2\cdots\cdots$$

Beispiel 7. Gegeben ist $M = 12000$; $p = 4$; $r = 500$. Gesucht wird t.

Auflösung. Es ist $12000 = 12500 \left\{1 - \left(\frac{1}{1,04}\right)^t\right\}$,

$$\text{oder } 500 = \left(\frac{1}{1,04}\right)^t \cdot 12500,$$

$$\text{oder } (1,04)^t = 25,$$

$$\text{daher } t = \log 25 : \log 1,04$$

$$= 1,3979400 : 0,0170333$$

$$= 82,07 \cdots$$

Aufgabe IV. Eine Rente von r Thlr. auf t Jahre soll gegen eine andere Rente von R Thlr. umgetauscht werden. Auf wie viel Jahre ist letztere zu zahlen, wenn in beiden Fällen p % gerechnet werden?

Auflösung. Für die erste Rente ist

$$M = \frac{100r}{p}\left\{1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^t\right\},$$

für die andere ist

$$M = \frac{100R}{p}\left\{1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^T\right\}.$$

Da M in beiden Gleichungen denselben Werth hat, so ist folglich:

$$\frac{100r}{p}\left\{1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^t\right\} = \frac{100R}{p}\left\{1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^T\right\},$$

$$\text{also } r - R = r\left(\frac{100}{100+p}\right)^t - R\left(\frac{100}{100+p}\right)^T.$$

Aus dieser Gleichung sind die Größen R, r, t, T numerisch mit Hülfe der Logarithmen zu bestimmen, p nur annähernd durch Probiren.

Beispiel 8. Gegeben ist $r = 800$; $p = 4$; $t = 12$; $R = 1200$. Gesucht wird T.

Auflösung. Es ist

$$800 - 1200 = 800\left(\frac{1}{1,04}\right)^{12} - 1200\left(\frac{1}{1,04}\right)^T,$$

$$\text{oder } 1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^T - 2 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12}.$$

$$\text{Also ist } \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^T = \left\{1 + 2\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12}\right\} : 3$$

$$= 0{,}7497\ldots.$$

$$\text{daher } T \cdot \log \frac{1}{1{,}04} = \log 0{,}7497,$$

$$\text{oder } T = \log 0{,}7497 : -(\log 1{,}04)$$

$$= 7{,}3\ldots\ldots$$

Beispiel 9. Gegeben ist $r = 800$; $p = 4$; $t = 12$; $T = 16$. Gesucht wird R.

Auflösung. Es ist

$$800 - R = 800\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12} - R\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{16}, \text{ daher}$$

$$R\left\{\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{16} - 1\right\} = 800\left\{\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{12} - 1\right\},$$

$$\text{oder } R[1 - (1{,}04)^{16}] = 800[(1{,}04)^4 - (1{,}04)^{16}],$$

$$\text{also } R = 800[(1{,}04)^{16} - (1{,}04)^4] : [(1{,}04)^{16} - 1]$$

$$= 644{,}37\cdots$$

Anm. Die Aufgaben mit veränderlichen Renten sind schwieriger zu lösen; die Behandlungsweise ist jedoch in der Hauptsache dieselbe.

Aufgaben.

Es bezeichne c das ausgeliehene Kapital, p die Prozente, t die Zeit, C die Summe, zu welcher c bei p % in t Jahren anwächst. Aus dreien dieser Größen die vierte zu bestimmen. Es ist gegeben:

1) $c=5000$; $p=4$; $t=40$; 2) $c=32500$; $p=3$; $t=24$; 3) $C=2000$; $p=3$; $t=10$; 4) $c=8000$; $t=16$; $C=16809{,}5$; 5) $c=5720$; $p=4\frac{1}{2}$; $C=13072\frac{7}{8}$; 6) $c=3865$; $p=2\frac{1}{2}$; $C=5500$; 7) $p=5$; $C=2c$;

8) 300 Thlr. werden zu 5 % ausgeliehen; zu Ende eines jeden Jahres werden die Zinsen hinzugelegt und außerdem noch 300 Thlr. Wie groß ist die Summe zu Ende des 20sten Jahres, wenn die 300 Thlr. zu Ende dieses Jahres nicht gezahlt werden?

9) 4000 Thlr. werden zu 4 % ausgeliehen; zu Ende eines jeden Jahres werden die Zinsen hinzugelegt und außerdem noch 4000 Thlr. Wie groß ist die Summe zu Ende des 7ten Jahres, wenn die 4000 Thlr. zu Ende des Jahres nicht gezahlt werden?

10) 6000 Thlr. werden zu 5 % ausgeliehen; zu Ende eines jeden Jahres werden die Zinsen hinzugelegt und außerdem noch 500 Thlr. Wie groß ist die Summe nach 10 Jahren, wenn alsdann die 500 Thlr. nochmals gezahlt werden?

11) 15467 Thlr. stehen zu 5 %; zu Ende jedes Jahres werden 600 Thlr. abgetragen. Wie viel beträgt die Schuld nach 10 Jahren?

12) Wie lange müssen 3600 Thlr bei 5 % auf Zinseszinsen stehen, um zu derselben Summe anzuwachsen, zu welcher 5000 Thlr. bei 4 % in 12 Jahren anwachsen würden?

13) Welches Kapital beträgt mit Zins und Zinseszins bei 4 % nach 15 Jahren ebensoviel, als 4500 Thlr. zu 6 % nach 9 Jahren?

14) Wie groß ist die Mise für eine Rente von 16000 Thlr. auf 25 Jahre bei 4 %?

15) Welche Rente kann neunmal gezahlt werden, wenn die Mise 7500 Thlr. beträgt und 4 % gerechnet werden?

16) Eine Summe von 30000 Thlr. soll abgetragen werden durch eine jährliche Abzahlung von 2124 Thlr. Wann ist die Summe abgetragen, wenn 6 % gerechnet werden?

Auflösungen.

1) $C = 24005{,}103\ldots$; 2) $C = 66065{,}808\ldots$; 3) $c = 1488{,}2\ldots$; 4) $p = 4\frac{3}{4}$; 5) $t = 18{,}7785\ldots$; 6) $t = 14{,}2871\ldots$; 7) $t = 14{,}20\ldots$; 8) 10415,7...; 9) 31593; 10) 16062,3...; 11) 17647; 12) 16,37... Jahre; 13) 4221; 14) 249953; 15) 1008,7...; 16) 32,23... Jahre.

Fünftes Capitel.

Von den combinatorischen Operationen, den Binomialcoefficienten, dem binomischen und polynomischen Lehrsatze.

§. 49. Erklärung.

Sind a, b, c, d u. s. w. gegebene Größen oder Elemente, so lassen sich diese in verschiedener Anzahl und Reihenfolge nebeneinander hinstellen oder gruppiren. Eine jede solche Gruppe, wie z. B. abcd, aacef u. s. w.

nennt man eine Form oder Complexion. Dieselbe heißt Union, Binion (Ambe), Trinion (Terne), Quaternion (Quaterne) u. s. w., je nachdem sie aus 1, 2, 3, 4 u. s. w. Elementen besteht. Die Anzahl und Natur aller möglichen Complexionen bei einer bestimmten Anzahl von Elementen zu bestimmen, ist die Aufgabe der combinatorischen Operationen. Dieselben zerfallen in die Lehre von den Permutationen, Variationen und Combinationen im engern Sinne.

A. Von den Permutationen.

§. 50. Erklärung.

Eine gegebene Complexion, z. B. abcd, wird versetzt oder permutirt, wenn man die Elemente dieser Complexion in veränderter Ordnung (acbd, bacd u. s. w.) hinschreibt. Alle möglichen Permutationen einer Complexion bilden eine Permutationsklasse, und zwar die 2te, 3te, 4te u. s. w., je nachdem die Complexion aus 2, 3, 4 u. s. w. Elementen besteht.

§. 51. Lehrsätze.

1) Die Anzahl der Permutationen der mten Klasse ist gleich dem Produkte $1 . 2 . 3 . 4 \ldots . m$. (Dasselbe wird kürzer durch m! bezeichnet und „m Fakultät" ausgesprochen).

Beweis. Die zweite Klasse hat zwei Permutationen ab und ba. Bei der dritten Klasse kann jedes Element das erste sein, während die zwei andern zwei Permutationen zulassen. Die Anzahl der Permutationen ist daher $2 . 3 = 3!$. Bei der vierten Klasse kann wiederum jedes Element das erste sein, während die drei andern 3! Versetzungen zulassen. Die Anzahl aller Versetzungen ist daher $(3!) . 4 = 4!$. Auf dieselbe Weise ergiebt sich die Richtigkeit der Lehrsatzes auch für die folgenden Klassen.

2) Wenn unter den m Elementen einer Complexion a αmal, b βmal, c γmal u. s. w. vorkommt, so ist die Anzahl der Permutationen gleich

$$\frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \ldots \ldots}.$$

Beweis. Denkt man sich zunächst die gleichen Elemente a unterschieden als a′, a″, a‴ u. s. w., ebenso die gleichen Elemente b, c u. s. w., so ist die Anzahl aller Permutationen gleich m! Unter diesen sind je $\alpha!$ Permutationen dadurch entstanden, daß bei unveränderter Ordnung der Elemente b, c, d u. s. w. blos die Elemente a′, a″, a‴ u. s. w. versetzt worden

sind. Werden nun diese verschiedenen Elemente a′, a″, a‴ u. s. w. einander gleich gesetzt, so fallen je $\alpha!$ Versetzungen in eine zusammen, und es bleiben dann nur $\frac{m!}{\alpha!}$ Versetzungen. Werden bei diesen die β Elemente b′, b″, b‴ u. s. w. ebenfalls nicht mehr unterschieden, so fallen von den $\frac{m!}{\alpha!}$ Permutationen wiederum je $\beta!$ in eine zusammen, und die Anzahl der übrigbleibenden beträgt $\frac{m!}{\alpha!\,\beta!}$. Kommt nun außerdem c γmal, d δmal vor u. s. w., so erhält man also für die Anzahl der Permutationen den Ausdruck $\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\ldots\ldots}$.

§. 52. Zusatz.

Kommen unter den m Elementen einer Complexion nur zwei verschiedene Elemente a und b vor, und zwar a αmal, b $(m-\alpha)$mal, so ist die Anzahl der Versetzungen $= \frac{m!}{(m-\alpha)!\,\alpha!}$. Dieser Ausdruck läßt eine Abkürzung zu. Es besteht der Zähler aus m Faktoren (1, 2, 3, ...m), der Nenner ebenfalls aus m Faktoren (1, 2, 3,....α und 1, 2, 3,... $(m-\alpha)$). Nun kann man Zähler und Nenner zugleich entweder durch $\alpha!$ oder durch $(m-\alpha)!$ dividiren. In ersterem Falle bleiben im Zähler und im Nenner $(m-\alpha)$, im zweiten Falle α Faktoren. Die Faktoren des Zählers beginnen mit m, und jeder nachfolgende ist um 1 kleiner; die des Nenners beginnen mit 1, und jeder nachfolgende ist um 1 größer.

Es ist also

$$\frac{m!}{\alpha!\,(m-\alpha)!} = \frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots\ldots[m-(\alpha-1)]}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\ldots\;\alpha},\ \text{oder auch}$$

$$\frac{m!}{\alpha!\,(m-\alpha)!} = \frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots\ldots[m-(m-\alpha-1)]}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\ldots\;(m-\alpha)}.$$

§. 53. Erklärung.

Ausdrücke, wie sie in §. 52 auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehen, nennt man **Binomialcoefficienten** und bezeichnet sie durch die allgemeine Form $a_{(m)}$ (ausgesprochen: a **mit dem Zeiger** m), wobei a den größten Faktor des Zählers bedeutet, hingegen der **Zeiger** m

den größten Faktor des Nenners, folglich auch die Anzahl der Faktoren. Es ist also

$$a_{(m)} = \frac{a.(a-1).(a-2).....[a-(m-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ ....\ m},$$

$$5_{(3)} = \frac{5\ .\ 4\ .\ 3}{1\ .\ 2\ .\ 3} = 10,$$

und die beiden in vorigem §. vorkommenden Binomialcoefficienten lassen sich durch $a_{(m)}$ und $a_{(a-m)}$ bezeichnen.

Für die Binomialcoefficienten gelten, wenn unter den Buchstaben a, m und n positive ganze Zahlen verstanden werden, folgende Lehrsätze:

1) $a_{(m)} = a_{(a-m)}$;

2) $m_{(m)} = 1$;

3) $m_{(m+n)} = 0$;

4) $a_{(m)} + a_{(m+1)} = (a+1)_{(m+1)}$.

Beweis zu 1. Er ergiebt sich aus der gegebenen Erklärung und aus §. 52. Es ist also z. B. $8_{(5)} = 8_{(3)}$, $9_{(4)} = 9_{(5)}$.

Beweise zu 2 und 3. Dieselben folgen aus der Erklärung.

Beweis zu 4. Es ist

$$a_{(m+1)} = a_{(m)} \cdot \frac{a-m}{m+1}, \text{ daher}$$

$$a_{(m)} + a_{(m+1)} = a_{(m)} \left\{1 + \frac{a-m}{m+1}\right\} = a_{(m)} \cdot \frac{a+1}{m+1}, \text{ oder}$$

$$a_{(m)} + a_{(m+1)} = \frac{(a+1).a.(a-1)......[a-(m-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ ......\ (m+1)} = (a+1)_{(m+1)}.$$

§. 54. Zusatz.

Bei der Bildung der einzelnen Permutationsklassen verfährt man folgendermaßen:

1) Bei zwei Elementen hat man die zwei Formen ab und ba.
2) Bei drei Elementen abc läßt man zunächst a an seiner Stelle und permutirt bc; dann schreibt man b voran und permutirt ac; dann schreibt man c voran und permutirt ab.
   Man erhält also die Formen abc, acb, bac, bca, cab, cba.

3) Bei vier Elementen abcd läßt man a an seiner Stelle und permutirt bcd (nach 2); dann schreibt man b voran und permutirt acd; dann schreibt man c, endlich d voran und permutirt jedesmal die drei letzten Elemente.

4) Bei fünf Elementen abcde permutirt man zuerst bcde; dann schreibt man b voran und permutirt acde u. s. w.

5) Das Verfahren bei m Elementen ergiebt sich aus dem Vorhergehenden.

Die Permutationen aus m Elementen, unter welchen mehrere gleiche Buchstaben vorkommen, werden in derselben Art gebildet. Man hat nur zu beachten, daß, wenn von mehreren gleichen Elementen das eine schon die erste Stelle eingenommen hat, nicht auch noch die andern die erste Stelle einnehmen können.

Anm. Bei der Bildung der einzelnen Klassen ist es vortheilhaft, die Elemente zunächst alphabetisch zu ordnen.

B. Von den Variationen.

§. 55. Erklärung.

Setzt man jedes der m verschiedenen Elemente a, b, c, d u. s. w. allen m Elementen voran, so bilden diese Verbindungen von zwei Elementen die zweite Variationsklasse mit Wiederholungen aus m Elementen. Bei vier Elementen a, b, c, d besteht diese Klasse aus folgenden Formen:

aa, ab, ac, ad
ba, bb, bc, bd
ca, cb, cc, cd
da, db, dc, dd.

Setzt man einer jeden dieser Formen wiederum jedes Element vor, so erhält man die dritte Klasse der Variationen mit Wiederholungen aus m Elementen. Man erhält die Formen:

aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, abd, aca, acb, acc, acd u. s. w.
baa, bab, bac, bad, bba, bbb, bbc, bbd, bca, bcb, bcc, bcd u. s. w.
caa, cab, cac, cad, cba, cbb, cbc, cbd, cca, ccb, ccc, ccd u. s. w.
daa, dab, dac, dad, dba, dbb, dbc, dbd, dca, dcb, dcc, dcd u. s. w.

Durch nochmaliges Vorsetzen aller m Elemente erhält man die vierte Klasse, und auf dieselbe Art die folgenden Klassen.

Läßt man aus einer beliebigen Variationsklasse diejenigen Formen weg, in welchen irgend ein Element öfter als einmal vorkommt, so erhält man die entsprechende Klasse der **Variationen ohne Wiederholungen.**

Die zweite Klasse enthält (bei vier Elementen) die Formen:

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.

Die dritte Klasse enthält die Formen:

abc, abd, acb, acd, adb, adc; bac, bad, bca, bcd, bda, bdc;
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb; dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

Anm. 1. Es ist leicht einzusehen, daß man bei Bildung der 2ten, 3ten u. s. w. Klasse der Variationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d u. s. w. dasselbe Verfahren beobachtet, als wenn man die 2te, 3te u. s. w. Potenz von (a+b+c+d+....) berechnen wollte.

Anm. 2. Die Regel für die Bildung der einzelnen Variationsklassen folgt zu Ende des Abschnitts C.

§. 56. Lehrsatz.

Die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen aus m Elementen ist in der xten Klasse $= m^x$.

Beweis. Die erste Klasse hat m Formen. Bei der Bildung der zweiten Klasse verbindet man jede dieser m Formen mit m Elementen, erhält also m^2 Formen. Bei der Bildung der dritten Klasse verbindet man jede dieser m^2 Formen mit m Elementen und erhält dadurch m^3 Formen. Ebenso erhält man für die vierte Klasse m^4, für die xte Klasse m^x Formen.

§. 57. Lehrsatz.

Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen aus m Elementen ist in der xten Klasse $= m(m-1)(m-2)\ldots\ldots[m-(x-1)]$.

Beweis. Aus der ersten Klasse mit m Elementen erhält man die zweite, indem man jedem dieser m Elemente die (m—1) von ihm verschiedenen Elemente vorsetzt. Man erhält dadurch m(m—1) Formen für die zweite Klasse. Setzt man jeder dieser m(m—1) Formen die (m—2) Elemente vor, die sie nicht enthält, so erhält man m(m—1)(m—2) Formen für die dritte Klasse. Für die folgenden Klassen wird der Beweis ebenso geführt.

C. Von den Combinationen im engern Sinne.

§. 58. Erklärung.

Combinationen im engern Sinne sind Variationen ohne Versetzungen. Man hat daher, wie bei den Variationen, Combinationen mit und ohne Wiederholungen, und man erhält eine beliebige Combinationsklasse aus der entsprechenden Variationsklasse durch Weglassen der Permutationen, und umgekehrt die Variationen aus den Combinationen durch Hinzufügen der Permutationen.

Bildet man aus den vier Elementen a, b, c, d die zweite und dritte Klasse der Combinationen, so erhält man die nachstehenden Formen:

1) Zweite Klasse der Combinationen mit Wiederholungen:

aa, ab, ac, ad,
bb, bc, bd,
cc, cd,
dd.

2) Zweite Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen:

ab, ac, ad,
bc, bd,
cd.

3) Dritte Klasse der Combinationen mit Wiederholungen:

aaa, aab, aac, aad,
abb, abc, abd,
acc, acd,
add,
bbb, bbc, bbd,
bcc, bcd,
bdd,
ccc, ccd,
cdd,
ddd.

4) Dritte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen:

abc, abd, acd, bcd.

§. 59. Lehrsatz.

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen aus m Elemen-menten ist in der x^{ten} Klasse $= m_{(x)}$.

Beweis. Die Anzahl der Variationen in derselben Klasse ist gleich $m(m-1)(m-2)\ldots.[m-(x-1)]$. Da nun jede Complexion dieser Variationsklasse aus x Elementen besteht, daher x! Permutationen zuläßt, so liefern x! Formen der Variationen nur eine Form der Combinationen. Die Anzahl der letztern ist also

$$m(m-1)(m-2)\ldots.[m-(x-1)] : x! = m_{(x)}.$$

§. 60. Lehrsatz.

Die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen aus m Elementen ist in der

1^{sten} Klasse $= m$;
2^{ten} " $= (m+1)_{(2)}$;
3^{ten} " $= (m+2)_{(3)}$;
4^{ten} " $= (m+3)_{(4)}$;
x^{ten} " $= (m+x-1)_{(x)}$.

Beweis zu 2. Setzt man jeder Form der ersten Klasse *sämmtliche* Elemente nach einander vor, so erhält man Formen der zweiten Klasse und zwar in der Art, daß Formen mit *gleichen* Elementen, wie aa, bb, *einmal* erhalten werden, Formen aber mit *verschiedenen* Elementen, wie ab, ac, *zweimal*, nämlich auch in den Versetzungen ba und ca. Man erhält daher *sämmtliche* Formen der zweiten Klasse doppelt, wenn man bei Bildung derselben jede Form der ersten Klasse mit dem Element, welches sie enthält, zweimal, mit den übrigen nur einmal verbindet. Alsdann liefert jede Form der ersten Klasse $(m+1)$ Formen der zweiten; die doppelte Anzahl der Formen der zweiten Klasse ist daher gleich $m(m+1)$, die einfache gleich $(m+1)_{(2)}$.

Beweis zu 3. Setzt man jeder Form der zweiten Klasse *sämmtliche* Elemente nach einander vor, so erhält man Formen der dritten Klasse und zwar in der Art, daß Formen mit *drei gleichen* Elementen, wie aaa, *einmal* erhalten werden, Formen mit *zwei gleichen* Elementen, wie aab,

zweimal (nämlich auch in der Versetzung baa), Formen mit drei verschiedenen Elementen, wie abc, dreimal (nämlich auch in den Versetzungen bac, cab). Man erhält daher sämmtliche Formen der dritten Klasse dreimal , wenn man jede Form der zweiten Klasse dreimal mit dem Elemente verbindet, welches sie zweimal enthält, zweimal mit dem, welches sie einmal enthält, einmal mit dem, welches sie gar nicht enthält. Je nachdem eine Form der zweiten Klasse beschaffen ist, liefert sie entweder $3+(m-1)$ oder $2+2+(m-2)$, also jedesmal $(m+2)$ Formen der dritten Klasse. Die dreifache Anzahl der letztern zusammen ist also gleich $(m+1)_{(2)} \cdot (m+2)$, die einfache gleich $(m+2)_{(3)}$.

Für die folgenden Klassen ergeben sich die Beweise in derselben Art.

Anm. Soll für eine bestimmte Klasse der Combinationen oder Variationen aus m Elementen die Anzahl der Formen bestimmt werden, welche den Buchstaben a enthalten, so bestimmt man die Anzahl der Formen erst für m, dann für (m—1) Elemente, und subtrahirt letztere Zahl von ersterer.

§. 61. Zusatz.

Soll die x^{te} Klasse der Combinationen mit Wiederholungen aus m Elementen gebildet werden, so schreibe man das niedrigste Element (d. h. das im Alphabet voranstehende) xmal nebeneinander als erste Form; dann vertausche man das zuletzt geschriebene nach und nach mit allen höhern Elementen; dann vertausche man das vorletzte, indem man zugleich alle möglichen Veränderungen des letzten Gliedes eintreten läßt, aber so, daß das voranstehende Element nie höher ist, als das nachfolgende; dann vertausche man das drittletzte Glied u. s. w. So erhält man z. B. für die vierte Klasse aus den Elementen a, b, c, d, e die Formen:

aaaa, aaab, aaac, aaad, aaae,

aabb, aabc, aabd, aabe, aacc, aacd, aace, aadd, aade, aace,

abbb, abbc, abbd, abbe, abcc, abcd, abce, abdd, abde, abee,

accc, accd, acce, acdd, acde, acee, addd, adde, adee, aeee,

bbbb, bbbc, bbbd, bbbe,

bbcc, bbcd, bbce, bbdd, bbde, bbee,

bccc, bccd, bcce, bcdd, bcde, bcee, bddd, bdde, bdee, beee,

cccc, cccd, ccce, ccdd, ccde, ccee, cddd, cdde, cdee, ceee,

dddd, ddde, ddee, deee,

eeee.

§. 62. Zusatz.

Die Combinationsklassen ohne Wiederholungen bildet man in derselben Art, jedoch so, daß kein Element zweimal vorkommt. Bei obiger Aufgabe beginnt man also mit abcd, ändert d, dann c, dann b und erhält auf diese Art die Formen:

abcd, abce, abde, acde, bcde.

Die Variationen mit und ohne Wiederholungen erhält man, wenn man zu jeder Complexion der entsprechenden Combinationsklasse noch die möglichen Permutationen hinzufügt.

D. Von dem binomischen und polynomischen Lehrsatze.

§. 63. Erklärung.

Der binomische Lehrsatz entwickelt die m^{te} Potenz des Binoms $(a+b)$ in eine nach den Potenzen von a und b geordnete Reihe, jedoch unter der Voraussetzung, daß m eine positive, ganze Zahl ist.

Der polynomische Lehrsatz entwickelt unter derselben Voraussetzung die m^{te} Potenz des Polynoms $(a+b+c+d+\ldots)$ in eine nach den Potenzen von a, b, c, d, ... geordnete Reihe.

§. 64. Lehrsatz.

$$(a+b)^m = a^m + m \cdot a^{m-1}b + m_{(2)} \cdot a^{m-2}b^2 + m_{(3)} \cdot a^{m-3}b^3 + \cdots$$

Beweis. Nach §. 55, Anm. 1 ist der Ausdruck $(a+b)^m$ gleich der Summe aller Formen aus der m^{ten} Klasse der Variationen mit Wiederholungen. Wenn man nun in dieser Summe alle Permutationen ein und derselben Form zusammenfaßt, so bleiben als verschiedene Formen nur die Combinationen mit Wiederholungen übrig, nämlich die Ausdrücke

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ a^{m-3}b^3, \ldots\ldots$$

aber jeder dieser Ausdrücke ist so oft in Rechnung zu bringen, als er sich permutiren läßt. Bezeichnet man die Anzahl der Permutationen beziehlich durch A, B, C, D u. s. w., so ist

$$(a+b)^m = A \cdot a^m + B \cdot a^{m-1}b + C \cdot a^{m-2}b^2 + D \cdot a^{m-3}b^3 + \cdots$$

Es ist nun (nach §. 51, 2)

$$A = \frac{m!}{m!} = m_{(m)} = 1; \qquad B = \frac{m!}{(m-1)!1!} = m_{(1)};$$

$$C = \frac{m!}{(m-2)!2!} = m_{(2)}; \qquad D = \frac{m!}{(m-3)!3!} = m_{(3)};\ \text{u. s. w.}$$

Man erhält daher, wenn man diese Werthe einsetzt, die Gleichung

$$(a+b)^m = a^m + m.a^{m-1}b + m_{(2)}.a^{m-2}b^2 + m_{(3)}.a^{m-3}b^3 + \cdots$$

Ist b negativ, so erhalten die Glieder mit ungeraden Potenzen von b das negative Vorzeichen, und es ist folglich

$$(a-b)^m = a^m - m.a^{m-1}b + m_{(2)}.a^{m-2}b^2 - m_{(3)}.a^{m-3}b^3 + \cdots$$

Anm. Die gefundenen Reihen brechen ab, sobald der Index zu m größer wird als m (§. 53, 3), und ferner müssen sich in ihnen die Zahlencoefficienten wiederholen (§. 53, 1). Es ist daher z. B.

$$(a \mp b)^5 = a^5 \mp 5a^4b + 5_{(2)}a^3b^2 \mp 5_{(3)}a^2b^3 + 5_{(4)}ab^4 \mp 5_{(5)}b^5$$
$$= a^5 \mp 5a^4b + 10a^3b^2 \mp 10a^2b^3 + 5ab^4 \mp b^5.$$

§. 65. Zusatz.

Man kann den binomischen Lehrsatz auch zur Entwicklung des Produkts $(a \mp x)(b \mp x)(c \mp x)(d \mp x) \cdots$ in eine nach Potenzen von x geordnete Reihe benutzen. Wären a, b, c, d... einander gleich (=a), so erhielte man (bei m Faktoren) das Resultat

$$x^m \mp ma\,.\,x^{m-1} + m_{(2)}a^2.\,x^{m-2} \mp \cdots$$

Sind aber jene Zahlen verschieden, so geht ma über in die Summe der m Ausdrücke a, b, c, d...., ferner $m_{(2)}a^2$ in die Summe der Combinationen (zu zweien) ohne Wiederholungen u. s. w., und es ist daher z. B. bei vier Elementen:

$$(a \mp x)(b \mp x)(c \mp x)(d \mp x) = x^4 \mp (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad$$
$$+bc+bd+cd)x^2 \mp (abc+abd+acd+bcd)x + abcd.$$

§. 66. Aufgabe.

Die Potenz $(a+b+c+d+\ldots)^m$ in eine nach den Potenzen von a, b, c, d, ... geordnete Reihe zu entwickeln.

Auflösung. Dieselbe ergiebt sich aus §§. 55 und 64. Man bildet zunächst die Combinationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d, ..., also die Formen:

a^m;

$a^{m-1}b$; $a^{m-1}c$; $a^{m-1}d$; $a^{m-1}e$; u. s. w.

$a^{m-2}b^2$; $a^{m-2}bc$; $a^{m-2}bd$; $a^{m-2}be$; u. s. w.

$a^{m-2}c^2$; $a^{m-2}cd$; $a^{m-2}ce$; u. s. w.

$a^{m-2}d^2$; $a^{m-2}de$; u. s. w.

u. s. w.

$a^{m-3}b^3$; $a^{m-3}b^2c$; $a^{m-3}b^2d$; $a^{m-3}b^2e$ u. s. w.

u. s. w.

Da nun jeder dieser Ausdrücke so oft in Rechnung zu bringen ist, als er sich permutiren läßt, so hat man dem allgemeinen Gliede $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ noch den Zahlenfaktor $\frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\cdots}$ hinzuzufügen (§. 51, 2).

In dieser Art erhält man z. B. für den Ausdruck $(a+b+c+d)^3$ die Glieder: $a^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3ab^2+6abc+6abd+3ac^2+6acd+3ad^2+b^3+3b^2c+3b^2d+3bc^2+6bcd+3bd^2+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$.

Anhang zu Capitel V.

Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

I. Erklärung. Wenn ein Ereigniß auf m verschiedene Arten verlaufen kann, die alle gleich möglich sind, und von denen n als günstig, m—n als ungünstig betrachtet werden, so läßt sich ein günstiger Verlauf um so eher erwarten, je größer die Anzahl der günstigen Fälle im Verhältniß zu der Anzahl der möglichen ist. Man nennt den Quotienten $\frac{n}{m}$, welcher dieses Verhältniß zwischen den günstigen und möglichen Fällen bezeichnet, die Wahrscheinlichkeit (W) des günstigen Verlaufes, in entsprechender Art den Quotienten $\frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}$ die Unwahrscheinlichkeit (U), und es ist daher

$$1)\ W + U = 1; \qquad 2)\ W : U = n : (m-n).$$

Anm. 1. Ist $W = 1$, so ist ein günstiger Erfolg gewiß; ist $W > \frac{1}{2}$, so ist er nach gewöhnlichem Sprachgebrauch wahrscheinlich; ist $W < \frac{1}{2}$, so ist er unwahrscheinlich; ist $W = \frac{1}{2}$, so ist ebensoviel Aussicht auf einen günstigen, wie auf einen ungünstigen Verlauf.

Anm. 2. Bei Wetten müssen die Einsätze in demselben Verhältniß stehen, wie die Wahrscheinlichkeiten des günstigen Verlaufes für beide Parteien, im Allgemeinen also in dem Verhältniß $W : U$. In der Wirklichkeit gilt diese Regel jedoch nur innerhalb gewisser Gränzen, denn wenn auch die Wahrscheinlichkeiten sich wie 1 : 100000 verhalten, so wird nicht leicht Jemand 100000 Thlr. gegen 1 Thlr. wetten.

II. Zusatz. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, soweit sie sich auf die vorangehende Erklärung stützt, ist eine Anwendung der Lehre von den Combinationen. Zur Auflösung der einfacheren Aufgaben sind daher die im fünften Capitel aufgestellten Lehrsätze schon ausreichend.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, mit einem Würfel auf das erste Mal Sechs zu werfen?

Auflösung. Man hat 6 mögliche Fälle, 1 günstigen; daher ist $W = \frac{1}{6}$.

Beispiel 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, aus einem Spiele französischer Karten beim ersten Male Coeur zu ziehen?

Auflösung. Man hat 52 mögliche Fälle, 13 günstige; daher ist $W = \frac{1}{4}$.

Beispiel 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, aus demselben Spiele zweimal hintereinander Coeur zu ziehen?

Auflösung. Die Anzahl der möglichen Verbindungen ist gleich der Anzahl der Combinationen zu zweien ohne Wiederholungen aus 52 Elementen, also gleich $52_{(2)}$. Hierbei liefern die 13 Coeurkarten $13_{(2)}$ günstige Verbindungen. Es ist also $W = 13_{(2)} : 52_{(2)} = \frac{1}{17}$.

Beispiel 4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, aus demselben Spiele sechsmal hintereinander Coeur zu ziehen?

Auflösung. Man findet W wie in 3, und zwar ist $W = 13_{(6)} : 52_{(6)} = \frac{33}{391510}$.

Beispiel 5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, mit drei Würfeln beim ersten Male wenigstens zwei gleiche Augen zu werfen?

Auflösung. Die Anzahl der möglichen Fälle ist gleich der Anzahl der Variationen zu dreien mit Wiederholungen aus 6 Elementen, also $= 6^3$, die Anzahl der ungünstigen Fälle gleich der Anzahl derselben Variationen ohne Wiederholungen, also $= 6.5.4$. Es ist daher $U = (6.5.4) : 6^3 = \frac{5}{9}$, folglich

$$W = \frac{4}{9}.$$

III. Aufgabe. Bei einem Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit für den einen Verlauf $= \frac{n}{m}$, für einen zweiten $= \frac{n'}{m}$, für einen dritten $= \frac{n''}{m}$ u. s. w. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß das Ereigniß in einer dieser Arten verlaufe?

Auflösung. Es ist $W = \frac{n + n' + n'' + \ldots}{m}$, da es noch immer m mögliche, aber $n + n' + n'' + \ldots.$ günstige Fälle sind.

Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, mit zwei Würfeln zwei gleiche Augen, oder Sieben als Summe der Augen zu werfen?

Auflösung. Jeder der beiden Fälle hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$; daher ist

$$W = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

IV. Aufgabe. Bei einem Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit des günstigen Verlaufes $= \frac{n}{m}$, bei einem zweiten $= \frac{n'}{m'}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß beide Ereignisse günstig verlaufen?

Auflösung. Sind beide Ereignisse unabhängig von einander, so ist die Anzahl der günstigen Fälle offenbar $= n . n'$, weil jeder der n Fälle sich mit jedem der n' Fälle verbinden läßt, und aus demselben Grunde ist die Anzahl der möglichen Fälle $= m . m,$; daher ist $W = \frac{n}{m} . \frac{n'}{m'}$. Stehen jedoch die Ereignisse in einer gewissen Abhängigkeit von einander, so richtet sich die Anzahl der günstigen und möglichen Fälle nach der Natur der Aufgabe.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, aus einem Spiele französischer Karten hintereinander drei Coeur zu ziehen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für das erste Mal ist $\frac{13}{52}$, für das zweite Mal, wo schon ein Coeur fehlt, $\frac{12}{51}$, für das dritte Mal $\frac{11}{50}$. Also ist

$$W = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \frac{13_{(3)}}{52_{(3)}} = \frac{17}{850}.$$

Beispiel 2. Wenn A, B, C jeder zwei Würfel auf einen Tisch werfen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A einen Pasch, B keinen Pasch, C aber Sechs als Summe der Augen wirft?

Auflösung. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{36}$; daher ist

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{25}{1296}.$$

Beispiel 3. Zwei Urnen stehen nebeneinander. In der ersten sind vier schwarze und eine weiße, in der zweiten zwei schwarze und drei weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, beim ersten Griff die zweite Urne zu wählen und zwei weiße Kugeln zu ziehen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit, in die zweite Urne zu greifen, ist $\frac{1}{2}$; die Wahrscheinlichkeit, alsdann 2 weiße Kugeln zu ziehen, ist $\frac{3}{10}$; daher ist

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{20}.$$

V. Aufgabe. Bei einem Versuche, der zu wiederholten Malen angestellt werden soll, ist die Wahrscheinlichkeit für den einen Verlauf $= \frac{n}{m}$, für einen zweiten $= \frac{n'}{m'}$, für einen dritten $= \frac{n''}{m''}$ u. s. w. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß beim ersten Male der erste Verlauf stattfinde, oder wenn dies nicht geschieht, beim zweiten Male der zweite Verlauf, oder wenn auch dies nicht geschieht, beim dritten Male der dritte?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Verlauf eintrete, ist $\frac{n}{m}$. Folglich ist $1 - \frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht eintrete und man noch einen Versuch machen müsse, und ferner ist $\left(1 - \frac{n}{m}\right)\frac{n'}{m'}$ die Wahrscheinlichkeit, daß bei diesem zweiten Versuche der zweite Verlauf eintrete. Die Wahrscheinlichkeit, daß einer dieser beiden Fälle stattfinde, ist also

$$\frac{n}{m} + \left(1 - \frac{n}{m}\right)\frac{n'}{m'} = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)\left(1 - \frac{n'}{m'}\right).$$

Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit durch $\frac{a}{b}$, so ist $\left(1 - \frac{a}{b}\right)$ die Wahrscheinlichkeit, daß keiner dieser Fälle eintrete, und man noch einen dritten Versuch machen müsse; daß dieser günstig ausfalle, dafür ist dann $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\frac{n''}{m''}$ die Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit W, daß einer der drei Fälle eintrete, ist also

$$\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{n''}{m''} = 1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{n''}{m''}\right) =$$

$$1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)\left(1 - \frac{n'}{m'}\right)\left(1 - \frac{n''}{m''}\right).$$

Entsprechend ist die Lösung, wenn noch mehr Fälle angenommen werden.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, mit einem Würfel beim ersten Male Sechs, oder beim zweiten Male Fünf zu werfen?

Auflösung. Es ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{6}$, $\frac{n'}{m'} = \frac{1}{6}$, daher $W = 1 - (\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}) = \frac{11}{36}$.

Beispiel 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, mit einem Würfel in drei Versuchen wenigstens einmal Sechs zu werfen?

Auflösung. Bei jedem einzelnen Versuche ist $\frac{1}{6}$ die Wahrscheinlichkeit; daher ist

$$W = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{91}{216}.$$

Beispiel 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß beim Niederfallen einer hochgeworfenen Münze unter vier Versuchen wenigstens einmal das Wappen oben liege?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Fall ist $\frac{1}{2}$. Daher ist

$$W = 1 - (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{15}{16}.$$

VI. Aufgabe. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Versuche ein gewisses Ereigniß eintrete, sei $\frac{n}{m}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß bei den ersten z Versuchen dieses Ereigniß jedesmal eintrete, bei den folgenden x Versuchen aber jedesmal nicht?

Auflös. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß zmal hintereinander eintrete, ist $\left(\frac{n}{m}\right)^z$, und die Wahrscheinlichkeit, daß es xmal hintereinander nicht eintrete, ist $\left(\frac{m-n}{m}\right)^x$. Die Wahrscheinlichkeit also, daß es bei $(z+x)$ Versuchen erst zmal eintrete, dann xmal nicht, ist $\left(\frac{n}{m}\right)^z \cdot \left(\frac{m-n}{m}\right)^x$. — Ist hierbei die Ordnung gleichgültig, soll es überhaupt nur zmal eintreten, xmal nicht, so hat man noch alle Permutationen von den z und x Fällen in Rechnung zu bringen. Alsdann ist

$$W = (z+x)_{(z)} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^z \cdot \left(\frac{m-n}{m}\right)^x.$$

Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, unter acht Würfen mit zwei Würfeln dreimal einen Pasch, fünfmal keinen Pasch zu werfen?

Auflösung. Es ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{6}$, $z = 3$, $x = 5$, also

$$W = 8_{(3)} \cdot (\tfrac{1}{6})^3 \cdot (\tfrac{5}{6})^5 = \tfrac{21875}{209952}.$$

VII. Aufgabe. Bei einem Versuche sei $\frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit des günstigen Verlaufes. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß bei $(z + x)$ Versuchen der günstige Verlauf wenigstens z mal eintrete?

Auflösung. Es sind (nach VI) die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, daß der günstige Verlauf zmal, oder $(z + 1)$mal, oder $(z + 2)$ mal u. s. w. bis $(z + x)$mal eintrete, und diese einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind alsdann zu addiren.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, unter acht Würfen mit zwei Würfeln wenigstens dreimal einen Pasch zu werfen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeiten, gerade 3mal, oder 4mal, oder 5mal u. s. w. (bis 8mal) einen Pasch zu werfen, sind (nach VI):

$$\frac{21875}{209952};\ \frac{21875}{839808};\ \frac{875}{209952};\ \frac{175}{419904};\ \frac{5}{209952};\ \frac{1}{1679616};$$

daher ist $W = \frac{226491}{1679616}$, ungefähr $= \frac{1}{8}$.

Beispiel 2. Wie groß ist für jeden von zwei gleich starken Spielern die Wahrscheinlichkeit, unter neun Spielen wenigstens vier zu gewinnen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeiten, gerade 4, oder 5, oder 6 u. s. w. Spiele zu gewinnen, sind:

$$9_{(4)} \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \cdot (\tfrac{1}{2})^5 = 9_{(4)} \cdot (\tfrac{1}{2})^9;$$

$$9_{(5)} \cdot (\tfrac{1}{2})^5 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 = 9_{(5)} \cdot (\tfrac{1}{2})^9;$$

u. s. w.;

daher ist $W = [9_{(4)} + 9_{(5)} + 9_{(6)} + 9_{(7)} + 9_{(8)} + 9_{(9)}] : 2^9 = \frac{382}{512}$.

Anm. Wenn also, um einen Einsatz zu gewinnen, entweder A noch 4, oder B noch 6 Spiele gewinnen muß, so können noch acht Spiele gespielt werden, ohne daß eine Entscheidung erfolgt; es kann nach dem achten Spiele A 3mal, B 5mal gewonnen haben, aber nach dem neunten Spiele ist das Ganze entschieden. Die Wahrscheinlichkeiten, daß unter diesen neun Spielen A wenigstens 4mal, B wenigstens 6mal gewinne, verhalten sich wie $\frac{382}{512}$ zu $\frac{130}{512}$. Wird daher das Spiel unterbrochen, und soll der Einsatz getheilt werden, so muß dies im Verhältniß von 382 zu 130 geschehen.

VIII. Zusatz. Wenn unter m theils günstigen, theils ungünstigen Ereignissen einzelne aus äußern Gründen leichter eintreten können, als die übrigen, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Verlaufes nicht

mehr in der angegebenen Art berechnen. In einzelnen Fällen läßt sich jedoch die Wahrscheinlichkeit aus einer Reihe von Beobachtungen ableiten. Hat man z. B. gefunden, daß beim Niederfallen einer hochgeworfenen Münze jedesmal bei 12 Versuchen 10mal das Wappen oben liegt, so kann man daraus schließen, daß irgend eine unbekannte Ursache dies bewirke, und kann erwarten, daß bei den nächsten 12 Versuchen sich wieder dasselbe Resultat ergeben werde. Auf derartigen fortgesetzten Beobachtungen beruhen die Tabellen, die man über die wahrscheinliche Lebensdauer, über die wahrscheinliche Zahl der jährlichen Geburten und Todesfälle u. s. w. entworfen hat. Wenn hierbei die Beobachtungen für gleiche Zeiträume nicht völlig übereinstimmende Resultate liefern, so nimmt man von letztern das arithmetische Mittel.

Sechstes Capitel.

Von den Kettenbrüchen.

§. 67. Erklärung.

Ein Kettenbruch oder continuirlicher Bruch entsteht, wenn man den Werth eines ächten Bruches annähernd in kleinern Zahlen anzugeben sucht. So ist z. B. $\frac{5}{47}$ annähernd gleich $\frac{1}{9}$, genau gleich $\frac{1}{9 + \frac{2}{5}}$; $\frac{2}{5}$ wiederum ist annähernd gleich $\frac{1}{2}$, genau gleich $\frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$. Setzt man diese Werthe ein, so erhält man $\frac{5}{47}$ ausgedrückt durch den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$, dessen allgemeine Form $$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots\ldots}}}$$ ist.

Ein Kettenbruch hat also den Zähler 1 und den Nenner $a + x$; x ist aber wiederum ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner $b + y$ ist; für y gilt wieder dasselbe, wie für x, u. s. w.

Die Zahlen $a, b, c \ldots.$, welche positiv und ganz sein müssen, nennt man die Quotienten (den ersten, zweiten, dritten u. s. w.).

Ein Kettenbruch heißt **endlich**, wenn er mit einem bestimmten Gliede abbricht, **unendlich**, wenn dies nicht der Fall ist.

§. 68. Aufgabe.

Einen ächten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Man dividirt Zähler und Nenner des Bruches durch den Zähler, so daß der Zähler den Werth 1, der Nenner die Form einer gemischten Zahl erhält. Den ächten Bruch dieses Nenners kürzt man in derselben Weise und setzt dieses Verfahren so lange fort, bis sich endlich ein Nenner durch den zugehörigen Zähler ohne Rest theilen läßt. So ist z. B.

$$\frac{17}{39} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{17}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{5}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Die Quotienten 2, 3, 2, 2 findet man am schnellsten mit Hülfe des folgenden leicht verständlichen Schema's.

$$\begin{array}{rrrrrr}
17 & | \; 39 & | \; 2 & & & \\
 & 34 & & & & \\
\hline
 & 5 & | \; 17 & | \; 3 & & \\
 & & 15 & & & \\
\hline
 & & 2 & | \; 5 & | \; 2 & \\
 & & & 4 & & \\
\hline
 & & & 1 & | \; 2 & | \; 2 \\
 & & & & 2 & \\
\hline
\end{array}$$

Die Divisoren werden immer kleiner. Jeder ächte Bruch muß also einen **endlichen** Kettenbruch liefern.

Irrationale Decimalbrüche läßt man mit irgend einer Stelle abbrechen und behandelt sie dann wie ächte Brüche. Je mehr Stellen man nimmt, desto ausgedehnter wird der Kettenbruch; aus einem Decimalbruche von unendlich vielen Stellen, der nicht einem ächten Bruche gleich ist, erhält man daher einen **unendlichen** Kettenbruch.

Unächte Brüche verwandelt man in gemischte Zahlen und läßt die ganze Zahl alsdann unberücksichtigt.

§. 69. Erklärung.

Benutzt man einen Kettenbruch nicht vollständig, sondern läßt denselben mit dem ersten, oder zweiten, dritten u. s. w. Quotienten abbrechen, so erhält man den ersten, zweiten, dritten u. s. w. **Partialwerth** des Kettenbruches. Der letzte Partialwerth ist gleich dem vollständigen Kettenbruche.

§. 70. Aufgabe.

Die Partialwerthe eines Kettenbruches aus den Quotienten 3, 4, 2, 3 zu bestimmen.

Auflösung. Die Partialwerthe sind:

$$\frac{1}{3};\quad \frac{1}{3+\frac{1}{4}};\quad \frac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}};\quad \frac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}}$$

Der erste Partialwerth ist $\frac{1}{3}$, der zweite $\frac{4}{13}$; den dritten erhält man, indem man zunächst $\frac{1}{4+\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$, und dann $\frac{1}{3+\frac{2}{9}} = \frac{9}{29}$ setzt; den vierten, indem man zunächst $\frac{1}{2+\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$, dann $\frac{1}{4+\frac{3}{7}} = \frac{7}{31}$, endlich $\frac{1}{3+\frac{7}{31}} = \frac{31}{100}$ setzt.

Anm. Die eben gegebene Auflösung bietet zwar keine besonderen Schwierigkeiten, ist aber unbequem, weil man jeden Partialwerth einzeln und unabhängig von den übrigen berechnen muß. Sie läßt sich vereinfachen, sobald eine Abhängigkeit der einzelnen Partialwerthe von einander nachgewiesen ist.

§. 71. Aufgabe.

Die aufeinanderfolgenden Partialwerthe $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ u. s. w. eines Kettenbruches aus den Quotienten a_1, a_2, a_3 u. s. w. zu berechnen.

Auflösung. Es ist

1) $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1}$, daher $p_1 = 1$, $q_1 = a_1$;

2) $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2}{q_1 a_2 + 1},$

daher $p_2 = a_2, \quad q_2 = q_1 a_2 + 1.$

Um den dritten Partialwerth zu erhalten, setzt man $a_2 + \frac{1}{a_3}$ statt a_2 in dem zweiten Partialwerthe ein. Dann ist

3) $\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_2 a_3 + 1}{q_1 a_2 a_3 + q_1 + a_3} = \frac{a_2 a_3 + 1}{(q_1 a_2 + 1) a_3 + q_1} = \frac{p_2 a_3 + p_1}{q_2 a_3 + q_1},$

daher $p_3 = p_2 a_3 + p_1, \quad q_3 = q_2 a_3 + q_1.$

Um den vierten Partialwerth zu erhalten, setzt man $a_3 + \frac{1}{a_4}$ statt a_3 in dem dritten Partialwerthe ein. Dann ist

4) $\frac{p_4}{q_4} = \frac{p_2 a_3 a_4 + p_1 a_4 + p_2}{q_2 a_3 a_4 + q_1 a_4 + q_2} = \frac{(p_2 a_3 + p_1) a_4 + p_2}{(q_2 a_3 + q_1) a_4 + q_2} = \frac{p_3 a_4 + p_2}{q_3 a_4 + q_2}.$

Es ergiebt sich also als *wahrscheinliche* allgemeine Formel:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2}}{q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2}}.$$

Hat man gefunden, daß diese richtig ist bis zum $(v-1)^{\text{ten}}$ Partialwerthe, und läßt sich beweisen, daß sie alsdann auch für den v^{ten} Partialwerth richtig sein muß, so ist sie *allgemein* gültig.

Es wird also vorausgesetzt (nach 1—4), daß

$$\frac{p_{v-1}}{q_{v-1}} = \frac{p_{v-2} \cdot a_{v-1} + p_{v-3}}{q_{v-2} \cdot a_{v-1} + q_{v-3}}$$

ist. Nun erhält man den v^{ten} Partialwerth aus dem $(v-1)^{\text{ten}}$, wenn man $a_{v-1} + \frac{1}{a_v}$ statt a_{v-1} einsetzt. Alsdann ist

$$\frac{p_v}{q_v} = \frac{p_{v-2} \cdot \left(a_{v-1} + \frac{1}{a_v}\right) + p_{v-3}}{q_{v-2} \cdot \left(a_{v-1} + \frac{1}{a_v}\right) + q_{v-3}}$$

$$= \frac{p_{v-2} \cdot a_{v-1} \cdot a_v + p_{v-3} \cdot a_v + p_{v-2}}{q_{v-2} \cdot a_{v-1} \cdot a_v + q_{v-3} \cdot a_v + q_{v-2}}$$

$$= \frac{(p_{v-2} \cdot a_{v-1} + p_{v-3}) \cdot a_v + p_{v-2}}{(q_{v-2} \cdot a_{v-1} + q_{v-3}) \cdot a_v + q_{v-2}} = \frac{p_{v-1} \cdot a_v + p_{v-2}}{q_{v-1} \cdot a_v + q_{v-2}}.$$

Die wahrscheinliche Formel ist daher allgemein gültig.

§. 72. Zusatz.

Nach vorigem §. erhält man den m^{ten} Partialwerth eines Kettenbruches in folgender Art: Man multiplicirt Zähler und Nenner des $(m-1)^{\text{ten}}$ Partialwerthes mit dem m^{ten} Quotienten und vergrößert beide Produkte beziehlich um Zähler und Nenner des $(m-2)^{\text{ten}}$ Partialwerthes. Bei der Bestimmung des ersten und zweiten Partialwerthes erleidet diese Regel insofern eine Ausnahme, als es für diesen Fall keinen $(m-1)^{\text{ten}}$ und $(m-2)^{\text{ten}}$ Partialwerth giebt.

Man erhält also z. B. aus den Quotienten 2, 3, 5, 4, 3 eines Kettenbruches die folgenden Partialwerthe:

1) $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}$;

2) $\frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{2.3+1} = \frac{3}{7}$;

3) $\frac{p_3}{q_3} = \frac{3.5+1}{7.5+2} = \frac{16}{37}$;

4) $\frac{p_4}{q_4} = \frac{16.4+3}{37.4+7} = \frac{67}{155}$;

5) $\frac{p_5}{q_5} = \frac{67.3+16}{155.3+37} = \frac{217}{502}$.

Die Berechnung der beiden ersten Partialwerthe weicht, wie schon oben bemerkt ist, von der Berechnung der übrigen der Form nach ab. Die abweichende Form läßt sich indessen beseitigen.

Setzt man nämlich $\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2}{q_1 a_2 + 1} = \frac{p_1 a_2 + 0}{q_1 a_2 + 1}$,

ferner $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1} = \frac{0 . a_1 + 1}{1 . a_1 + 0}$,

so entsprechen diese beiden Formen ebenfalls der oben gegebenen Regel man muß jedoch zur Erklärung dieser Formen die Annahme machen, daß es vor dem ersten Partialwerthe eines jeden Kettenbruches noch einen Partialwerth $\frac{0}{1}$, und vor diesem noch einen ferneren Partialwerth $\frac{1}{0}$ gebe. Mit Hülfe dieser Annahme wird die Berechnung eine durchaus gleichmäßige. Am bequemsten läßt sie sich nach dem folgenden Schema ausführen, welches sich auf die gemachte Annahme stützt:

	1	0
	0	1
2	1	2
3	3	7
5	16	37
4	67	155
3	217	502.

§. 73. Aufgabe.

Die Differenz zweier aufeinander folgenden Partialwerthe zu bestimmen.

Auflösung. Es ist

1) $\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{q_1 \cdot q_2}$. Setzt man (nach §. 71)

$$p_1 = 1, \quad q_2 = q_1 a_2 + 1, \quad p_2 = a_2,$$

so ist $p_1 q_2 - q_1 p_2 = q_1 a_2 + 1 - q_1 a_2 = 1$, folglich

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{q_1 \cdot q_2};$$

2) $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_2 q_3 - q_2 p_3}{q_2 \cdot q_3}$. Setzt man wiederum

$$q_3 = q_2 a_3 + q_1, \quad p_3 = p_2 a_3 + p_1,$$

so ist, wenn man die nöthigen Multiplicationen ausführt,

$$p_2 q_3 - q_2 p_3 = q_1 p_2 - p_1 q_2 = -1 \text{ (nach 1), folglich}$$

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = -\frac{1}{q_2 \cdot q_3}.$$

Es ergiebt sich also als wahrscheinliche allgemeine Formel:

$$\frac{p_{v-1}}{q_{v-1}} - \frac{p_v}{q_v} = \mp \frac{1}{q_{v-1} \cdot q_v}.$$

Hat man gefunden, daß diese richtig ist bis zum $(m-1)^{\text{ten}}$ Partialwerth, und läßt sich beweisen, daß sie alsdann auch für den m^{ten} Partialwerth richtig sein muß, so ist sie allgemein gültig.

Es ist also vorausgesetzt (nach 1—2), daß

$$\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_{m-1} \cdot q_m - p_m \cdot q_{m-1}}{q_{m-1} \cdot q_m} = \mp \frac{1}{q_{m-1} \cdot q_m} \text{ ist.}$$

Nun ist $\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{p_m \cdot q_{m+1} - p_{m+1} \cdot q_m}{q_m \cdot q_{m+1}}$.

Setzt man im Zähler dieses letzteren Quotienten (nach §. 71)

$p_{m+1} = p_m \cdot a_{m+1} + p_{m-1}$, ferner $q_{m+1} = q_m \cdot a_{m+1} + q_{m-1}$,

so erhält man, wenn man die nöthigen Multiplicationen ausführt,

$p_m \cdot q_{m+1} - p_{m+1} \cdot q_m = q_{m-1} \cdot p_m - q_m \cdot p_{m-1} = \mp 1$ (s. Voraussf.),

$$\text{also } \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \mp \frac{1}{q_{m-1} \cdot q_m}.$$

Die wahrscheinliche Formel ist daher allgemein gültig.

§. 74. Zusatz.

Nach vorigem §. sind die Differenzen der aufeinanderfolgenden Partialwerthe abwechselnd positiv und negativ. Da nun die Differenz des ersten und zweiten Partialwerthes positiv ist, so ist folglich jeder Partialwerth von ungerader Ordnungszahl größer als der zunächst folgende und der zunächst vorangehende; hingegen ist ein Partialwerth von gerader Ordnungszahl kleiner als die beiden ihn einschließenden. Es wird ferner die Differenz $\frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}}$ zweier aufeinanderfolgenden Partialwerthe um so kleiner, je größer die Ordnungszahl n ist, weil mit steigendem n auch q_n und q_{n+1} wachsen. Hieraus ergiebt sich Folgendes:

Sind x, y, v, w aufeinanderfolgende Partialwerthe, so ist y entweder größer als jeder der einschließenden Werthe x und v, oder kleiner als jeder derselben. Da nun aber y näher an v liegt, als an x, insofern die Differenzen immer kleiner werden, so muß v der Größe nach zwischen den vorangehenden Werthen x und y liegen, ebenso w zwischen y und v, also auch zwischen x und y. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialwerthen liegen folglich der Größe nach alle spätern Partialwerthe, also auch der letzte, der wahre Werth des Bruches, und von diesen zwei Partialwerthen muß daher der eine größer, der andere kleiner als der wahre Werth des Bruches sein. Die aufeinanderfolgenden Partialwerthe sind also abwechselnd größer oder kleiner als der wahre Werth, nähern sich demselben aber um so mehr, je größer ihre Ordnungszahl ist; die Partialwerthe von ungerader Ordnungszahl sind sämmtlich größer als der wahre Werth, die übrigen sind kleiner.

§. 75. Zusatz.

Bezeichnen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ zwei aufeinanderfolgende Partialwerthe, und ist ferner $\frac{m}{n}$ ein Bruch von der Eigenschaft, daß m und n ganze Zahlen sind, und n der Größe nach zwischen q und q′ liegt, so weicht $\frac{m}{n}$ von dem wahren Werthe des Kettenbruches mehr ab, als der Partialwerth $\frac{p'}{q'}$, welcher den größeren Nenner hat.

Beweis. Es ist $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} = \frac{1}{qq'}$, (absolut genommen),

ferner $\frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{pn - mq}{qn}$.

Da nun p, q, m und n ganze Zahlen sind, so ist $pn - mq$ mindestens gleich 1 (absolut genommen); hingegen ist (nach der Voraussetzung) $qn < qq'$. Hieraus folgt, daß $\frac{pn - mq}{qn} > \frac{1}{qq'}$ ist, oder daß $\frac{m}{n}$ der Größe nach nicht zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ liegt, folglich den wahren Werth weniger genau angiebt, als $\frac{p'}{q'}$.

Ein beliebiger Partialwerth kommt also dem wahren Werthe des Bruches näher, als irgend ein anderer Bruch mit kleinerem Nenner. Hieraus ergiebt sich zugleich, daß ein Partialwerth sich nicht kann kürzen lassen.

§. 76. Aufgaben.

I. Die Näherungswerthe des ächten Bruches $\frac{349}{1794}$ anzugeben.

Auflösung. Verwandelt man den Bruch in einen Kettenbruch, so erhält man die Quotienten 5, 7, 8, 6. Die Näherungswerthe sind also:

$$\frac{1}{5};\ \frac{7}{36};\ \frac{57}{293};\ \frac{349}{1794}.$$

II. Die Näherungswerthe der Irrationalzahl $\pi = 3{,}141592653\ldots$ anzugeben.

Auflösung. Verwandelt man den Bruch $\frac{314159265}{100000000}$ in einen Kettenbruch, so erhält man die Quotienten 7; 15; 1; 292 u. s. w., folglich die Partialwerthe $\frac{1}{7}$; $\frac{15}{106}$; $\frac{16}{113}$; $\frac{4687}{33102}$ u. s. w. Die Näherungswerthe der Zahl π sind also: $\frac{22}{7}$; $\frac{333}{106}$; $\frac{355}{113}$; $\frac{103993}{33102}$; u. s. w.

Anm. Die Zahl $\frac{22}{7}$ ist von Archimedes, die Zahl $\frac{355}{113}$ von Metius gefunden. Letztere ist schon sehr genau, denn sie weicht vom wahren Werthe noch nicht um $\frac{1}{113 \cdot 33102}$ ab, welches der Unterschied des dritten und vierten Partialwerthes ist.

III. Die Länge des Jahres beträgt $365\frac{109}{450}$ Tage. Die Näherungswerthe des Bruches anzugeben.

Auflösung. Man findet die Werthe $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{29}$; $\frac{8}{33}$; $\frac{31}{128}$; $\frac{39}{161}$; $\frac{109}{450}$.

Anm. Die Zahl $\frac{8}{33}$ liegt der Zeitrechnung der alten Perser zu Grunde. Der Gregorianische Kalender hat die Zahl $\frac{97}{400}$, die weniger richtig ist, als $\frac{39}{161}$ und $\frac{109}{450}$.

IV. Der synodische Monat beträgt 29,530588... Tage, das tropische Jahr hingegen 365,242222... Tage. Die Näherungswerthe für das Verhältniß dieser zwei Zahlen anzugeben.

Auflösung. Man findet die Werthe $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{25}$; $\frac{3}{37}$; $\frac{8}{99}$; $\frac{11}{136}$; $\frac{19}{235}$; $\frac{334}{4131}$ u. s. w.

Anm. Der Bruch $\frac{19}{235}$ giebt den Mondscyclus in der Chronologie, in welchem 235 synodische Monate 19 Jahren gleich gesetzt werden (Meton; güldene Zahl). Er ist etwas zu klein.

§. 77. Aufgaben.

I. Die Näherungswerthe der Wurzel $\sqrt{15}$ anzugeben.

Auflösung. Die Wurzel liegt zwischen 3 und 4. Es ist daher

$$\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{x}, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}.$$

Da nun $\sqrt{15}+3$ zwischen 6 und 7 liegt, so muß man bei der Division durch 6 mindestens 1 Ganzes erhalten. Daher ist

$$x = \frac{\sqrt{15}+3}{6} = 1 + \frac{\sqrt{15}-3}{6} = 1 + \frac{1}{x_1}, \text{ folglich}$$

$$x_1 = \frac{6}{\sqrt{15}-3} = \sqrt{15}+3 = 6 + (\sqrt{15}-3) = 6 + \frac{1}{x}.$$

Setzt man nun für x den oben gefundenen Werth ein, so ist

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}}$$

Die Näherungswerthe sind: $\frac{3}{1}$; $\frac{4}{1}$; $\frac{27}{7}$; $\frac{31}{8}$; $\frac{213}{55}$ u. s. w.

Der erhaltene Kettenbruch ist unendlich, jedoch kehren die Quotienten in regelmäßiger Reihenfolge wieder, und der Bruch ist daher periodisch.

II. Die Näherungswerthe der Wurzel $\sqrt{19}$ anzugeben.

Auflösung. Es ist $\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{x}$,

$$x = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4^{*)}}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-2}{3} = 2 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{19}-2} = \frac{3.(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19}-3}{5} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = \frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{\sqrt{19}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{19}-3}{2} = 3 + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19}-2}{5} = 1 + \frac{1}{x_4},$$

$$x_4 = \frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{\sqrt{19}+2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-4}{3} = 2 + \frac{1}{x_5},$$

$$x_5 = \frac{3}{\sqrt{19}-4} = \sqrt{19}+4 = 8 + \sqrt{19}-4 = 8 + \frac{1}{x}.$$

---

*) Man bestimmt wiederum, wie viel Ganze in diesem Quotienten enthalten sein müssen, und trennt dieselben von dem Quotienten.

Die Quotienten des Kettenbruches bilden also die Periode 2; 1; 3; 1; 2; 8.

Die Näherungswerthe sind: 4; $4\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{3}$; $4\frac{4}{11}$; $4\frac{5}{14}$; $4\frac{14}{39}$; $4\frac{117}{326}$ u. s. w.

§. 78. Aufgabe.

Den wahren Werth x eines periodischen Kettenbruches mit Hülfe einer Quadratwurzel darzustellen.

Auflösung. Der Bruch habe die periodisch wiederkehrenden Quotienten 1; 6; 1; 6; u. s. w.

Es ist alsdann
$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+x}} = \frac{6+x}{7+x},$$

daher
$$x^2 + 6x = 6$$
$$x = -3 + \sqrt{15}.$$

Anm. Eine weitere Anwendung der Kettenbrüche findet sich in dem folgenden Capitel.

Aufgaben.

I. Die folgenden Brüche in Kettenbrüche zu verwandeln und deren Quotienten anzugeben.

1) $\frac{14}{17}$; 2) $\frac{13}{19}$; 3) $\frac{17}{39}$; 4) $\frac{19}{89}$; 5) $\frac{23}{147}$; 6) $\frac{155}{366}$; 7) $\frac{249}{1705}$; 8) $\frac{657}{2005}$; 9) $\frac{839}{1744}$; 10) $\frac{2056}{7933}$.

II. Die Näherungswerthe folgender Brüche anzugeben.

11) $\frac{351}{965}$; 12) $\frac{1947}{3359}$; 13) $\frac{587}{1943}$; 14) $\frac{7147}{13597}$; 15) $\frac{907}{18564}$; 16) 0,591; 17) 0,2237; 18) 0,3295; 19) 0,232323....; 20) 0,15801580......

III. Die Näherungswerthe folgender Wurzeln anzugeben.

21) $\sqrt{3}$; 22) $\sqrt{2}$; 23) $\sqrt{21}$; 24) $\sqrt{68}$; 25) $\sqrt{130}$.

IV. Aus folgenden periodischen Quotienten die wahren Werthe der betreffenden unendlichen Kettenbrüche zu bestimmen.

26) 4, 4,....; 27) 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4....; 28) 6, 6,....; 29) 1, 3, 5, 1, 3, 5....; 30) 2, 3, 6, 2, 3, 6....

Auflösungen.

1) 1, 4, 1, 2; 2) 1, 2, 6; 3) 2, 3, 2, 2; 4) 4, 1, 2, 6; 5) 6, 2, 1, 1, 4; 6) 2, 2, 1, 3, 3, 4; 7) 6, 1, 5, 1, 1, 4, 4; 8) 3, 19, 3, 11; 9) 2, 12, 1, 2, 2, 9; 10) 3, 1, 6, 15, 3, 6; 11) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$, 12) $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{19}$, $\frac{40}{69}$, $\frac{91}{157}$, $\frac{131}{226}$, $\frac{222}{383}$, $\frac{575}{992}$; 13) $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{13}{43}$, $\frac{29}{96}$, $\frac{100}{331}$, $\frac{129}{427}$, $\frac{229}{758}$; 14) $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{19}$, $\frac{31}{59}$, $\frac{41}{78}$, $\frac{646}{1229}$; 15) $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{41}$, $\frac{15}{307}$, $\frac{77}{1576}$, $\frac{169}{3459}$, $\frac{246}{5035}$; 16) $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{22}$, $\frac{289}{489}$, $\frac{302}{511}$, $\frac{591}{1000}$; 17) $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{15}{67}$, $\frac{17}{76}$, $\frac{185}{827}$, $\frac{217}{970}$; 18) $\frac{1}{3}$, $\frac{28}{85}$, $\frac{29}{88}$, $\frac{57}{173}$, $\frac{86}{261}$, $\frac{659}{2000}$; 19) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{10}{43}$, $\frac{13}{56}$, $\frac{23}{99}$; 20) $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{19}$, $\frac{67}{424}$, $\frac{70}{443}$, $\frac{137}{867}$, $\frac{481}{3044}$, $\frac{1580}{9999}$; 21) 1, 2, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{8}{11}$, $1\frac{11}{15}$, $1\frac{30}{41}$ u. s. w.; 22) 1, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{5}{12}$, $1\frac{12}{29}$, $1\frac{29}{70}$ u. s. w.; 23) 4, 5, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{5}$, $4\frac{4}{7}$, $4\frac{7}{12}$, $4\frac{60}{103}$, $4\frac{67}{115}$ u. s. w.; 24) 8, $8\frac{1}{4}$, $8\frac{16}{65}$, $8\frac{65}{264}$ u. s. w.; 25) 11, $11\frac{1}{2}$, $11\frac{2}{5}$, $11\frac{45}{112}$, $11\frac{92}{229}$, $11\frac{229}{570}$ u. s. w.;

26) $-2+\sqrt{5}$; 27) $-2+\sqrt{7}$; 28) $-3+\sqrt{10}$;

29) $\frac{1}{4}\{-9+\sqrt{145}\}$; 30) $\frac{1}{14}\{-41+\sqrt{2213}\}$.

Siebentes Capitel.

Von den unbestimmten Gleichungen.

§. 79. Erklärung.

Sind zur Bestimmung von n Unbekannten weniger als n Gleichungen gegeben, so muß die letzte Eliminationsgleichung mindestens noch zwei Unbekannten enthalten, und die Anzahl der möglichen Lösungen ist daher eine unbegränzte, wenn sie nicht etwa durch Nebenbestimmungen beschränkt wird, z. B. dadurch, daß nur die den Gleichungen genügenden ganzen Zahlen gesucht werden sollen. Gleichungen dieser Art heißen unbestimmte.

Anm. Das älteste Werk über Aufgaben, welche zu unbestimmten Gleichungen führen, rührt von dem Griechen Diophantus her. Man nennt daher diese Aufgaben auch wohl Diophantische.

A. Von den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.

§. 80. Aufgaben.

I. Die Gleichung $5x + 17y = 18$ nach x aufzulösen.

Auflösung. Es ist $x = \frac{18 - 17y}{5}$.

Für jeden beliebig angenommenen Werth von y erhält man aus dieser Gleichung den zugehörigen Werth von x. Nun sei aber außerdem die Bedingung gestellt, daß die Werthe von x und y ganze Zahlen sein sollen. Alsdann führt man in dem Ausdrucke $(18 - 17y) : 5$ die Division so weit als möglich aus und erhält

$$1)\ x = \frac{18 - 17y}{5} = 3 - 3y + \frac{3 - 2y}{5}.$$

Wenn nun der zu Ende der Gleichung stehende Quotient eine ganze Zahl sein soll, so muß

$$\frac{3 - 2y}{5} = z, \text{ oder}$$

$$2)\ y = \frac{3 - 5z}{2} = 1 - 2z + \frac{1 - z}{2}$$

sein. Wenn endlich $\frac{1 - z}{2}$ eine ganze Zahl sein soll, so muß

$$\frac{1 - z}{2} = v, \text{ oder}$$

$$3)\qquad z = 1 - 2v$$

sein. Setzt man nun den in 3) für z gefundenen Werth in 2) ein, so erhält man:

$$4)\qquad y = 5v - 1, \text{ daher nach 1)}$$

$$5)\qquad x = 7 - 17v.$$

Der Ausdruck v bezeichnet jede positive und negative ganze Zahl, auch die Null.

Setzt man z. B. $v =$	-1;	0;	1;	2;	3; ....
so ist $x =$	24;	7;	-10;	-27;	-44; ....
$y =$	-6;	-1;	4;	9;	14; ....

Je zwei übereinanderstehende Werthe von x und y genügen der gegebenen Gleichung.

Anm. In der gefundenen Auflösung bezeichnet v jede mögliche (ganze) Zahl. Dasselbe thun aber z. B. auch die Ausdrücke $(v'+1)$, $(v''+5)$ u. s. w. Vertauscht man nun v in 4) und 5) mit diesen Ausdrücken, so erhält man

$$\begin{cases} x = -17v' - 10 \\ y = 5v' + 4 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x = -17v'' - 78 \\ y = 5v'' + 24. \end{cases}$$

Diese Auflösungen sagen dasselbe, wie die vorher erhaltene, sind aber äußerlich von derselben verschieden.

II. Die positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, die durch 7 dividirt den Rest 4, durch 8 dividirt den Rest 5 geben.

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchten Zahlen durch M, so ist:

$$1)\ M = 7x\,^{*)} + 4,$$

$$2)\ M = 8y + 5,$$

daher $7x + 4 = 8y + 5$,

$$x = \frac{8y+1}{7} = y + \frac{y+1}{7}.$$

Setzt man nun $\frac{y+1}{7} = v$, also $x = y + v$, so ist

$$y = 7v - 1, \quad x = 8v - 1, \text{ daher}$$

$$M = (8y + 5) = (7x + 4) = 56v - 3.$$

Da nur positive Werthe gesucht werden sollen, so muß v mindestens gleich 1 sein. Die Werthe von M sind alsdann: 53; 109; 165 u. s. w.

III. Die Gleichung $4x + 6y = 15$ nach x aufzulösen.

Auflösung. Es ist $x = \frac{15-6y}{4} = 3 - y + \frac{3-2y}{4} = 3 - y + z;$

Da nun $\frac{3-2y}{4} = z$ ist, so ist

$$y = 1\frac{1}{2} - 2z, \text{ folglich } x = 1\frac{1}{2} + 3z.$$

---

*) x und y bedeuten jede positive ganze Zahl.

Anm. Aus dieser Auflösung geht hervor, daß x und y nicht gleichzeitig ganze Zahlen sein können, und daß also eine Auflösung in ganzen Zahlen für die gegebene Gleichung nicht möglich ist. Dies hätte übrigens ohne weitere Berechnung schon daraus abgeleitet werden können, daß in der gegebenen Gleichung die Glieder 4x und 6y jedenfalls durch 2 theilbar sind, während die Zahl 15 es nicht ist. — Die Gleichung $ax + by = c$ liefert folglich nur dann eine Auflösung in ganzen Zahlen, wenn entweder a und b relative Primzahlen sind, oder wenn auch c durch den gemeinschaftlichen Theiler von a und b theilbar ist.*)

§. 81. Zusatz.

Wenn der Gleichung

$$ax = by + c$$

die Werthe genügen:

$$x = m;\ y = n, \text{ so daß also}$$

$$1)\qquad am = bn + c \text{ ist,}$$

so müssen ihr auch die Werthe genügen:

$$x = bv + m;\ y = av + n.$$

Setzt man nämlich diese Werthe in der gegebenen Gleichung ein, so erhält man:

$$2)\qquad abv + am = abv + bn + c, \text{ oder}$$

$$am = bn + c,$$

und dies ist nach 1) eine richtige Gleichung.

Die allgemeine Auflösung einer unbestimmten Gleichung läßt sich also aus einer einzelnen unmittelbar ableiten.

Anm. Die unbestimmten Gleichungen können mit Hülfe dieses Satzes häufig in sehr bequemer Art dadurch gelöst werden, daß man eine einzelne Lösung durch Probiren bestimmt. Man sieht z. B. ohne weitere Rechnung, daß der Gleichung $14x = 17y - 3$ die Werthe genügen: $x = 1$; $y = 1$; die allgemeine Auflösung ist folglich: $x = 1 + 17v$; $y = 1 + 14v$. In Bezug auf die äußere Form der Lösung ist das in §. 80 (Aufgabe I, Anm.) Gesagte zu berücksichtigen.

§. 82. Zusatz.

Eine einzelne Lösung der Gleichung $ax = by + c$ läßt sich mit Hülfe der Kettenbrüche in folgender Art finden.

---

*) Ueber die Gränzen der Auflösungen in positiven Zahlen vergleiche §. 84.

1) Es sei

$$ax = by + 1,$$

und zwar sei diese Gleichung so geordnet, daß die links stehende Unbekannte (x) den größern Coefficienten hat, und daß die Vorzeichen zu x und y gesetzt werden, b und a also positiv sind. Man verwandele nun (b : a) in einen Kettenbruch und bestimme dessen Partialwerthe; der letzte ist (b : a), der vorletzte sei (b′ : a′). Alsdann ist

$$\mp (b'a - ba') = + 1 \text{ (nach §. 73) *)}.$$

Setzt man diesen Werth in der oben gegebenen Gleichung ein, so ist

$$ax = by \mp (b'a - ba'), \text{ oder}$$

$$a(x \pm b') = b(y \pm a').$$

Dieser Gleichung genügen die Werthe: $x = \mp b'$; $y = \mp a'$.

Der vorletzte Partialwerth (b′ : a′) des Kettenbruches (b : a) liefert also eine Lösung. Ist derselbe von ungerader Ordnungszahl, so ist $x = + b'$; $y = + a'$; im entgegengesetzten Falle ist $x = - b'$; $y = - a'$. Für den Fall, daß x oder y das negative Vorzeichen hat, sind die Vorzeichen der gefundenen Lösungen in entsprechender Art zu ändern.

2) Es sei

$$ax = by + c.$$

Alsdann ist $ax = by \mp c(b'a - ba')$ (nach 1),

oder $a(x \pm cb') = b(y \pm ca')$,

folglich $x = \mp cb'$, $y = \mp ca'$.

Für die Bestimmung der Vorzeichen gilt das bei 1) Gesagte.

Beispiel. Es sei $17x = 5y + 3$.

Für den Bruch $\frac{5}{17}$ erhält man die Näherungswerthe: $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{17}$, und der gegebenen Gleichung genügen also die Werthe:

$$x = - cb' = - 3 . 2 = - 6; \; y = - ca' = - 3 . 7 = - 21.$$

Die allgemeine Lösung ist folglich (nach §. 81):

$$x = - 6 + 5v; \quad y = - 21 + 17v.$$

Anm. Vergl. §. 80, Aufgabe I, Anm.

*) Das positive Vorzeichen wird genommen, wenn der vorletzte Partialwerth eine ungerade Ordnungszahl hat.

§. 83. Aufgabe.

Die Zahl 6743 in zwei Theile der Art zu zerlegen, daß der erste den Rest 8 giebt, wenn er durch 14, der zweite den Rest 3, wenn er durch 11 dividirt wird.

Auflösung. Es ist $14x + 8 + 11y + 3 = 6743$,

$$\text{oder } 14x = -11y + 6732.$$

Die Näherungswerthe von $\frac{11}{14}$ sind $\frac{1}{1}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{11}{14}$.

Folglich ist $x = -11v + 4 \,.\, 6732 = -11v + 26928$;

$$y = +14v - 5 \,.\, 6732 = +14v - 33660.$$

Damit y positiv werde, muß v so groß genommen werden, daß die Zahl -33660 verschwindet. Man setzt daher sogleich $v = w + 2404$, weil $14 \,.\, 2404$ nur wenig kleiner ist als 33660. Dann erhält man:

$$x = -11w + 484;\ y = 14w - 4.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe:

$$x = 473;\ 462;\ 451 \ldots\ldots\ldots\ldots 11;$$

$$y = 10;\ 24;\ 38 \ldots\ldots\ldots\ldots 598;$$

ferner folgende Gleichung als Lösung der gestellten Aufgabe:

$6743 = [(14x+8)+(11y+3)] = (6630+113) = (6476+267)$ u. s. w.

§. 84. Aufgabe.

Die Gleichung $ax + by + cz = m$ nach x, y, z aufzulösen.

Auflösung. Soll die Lösung in ganzen Zahlen stattfinden, so dürfen a, b, c nicht einen gemeinschaftlichen Theiler haben, den nicht auch m hätte. Ist dieser Bedingung genügt, so setzt man für z nach und nach alle ganzen Zahlen ein und bestimmt dann x und y auf die in den vorigen §§. angegebene Art. Haben a und b einen gemeinschaftlichen Theiler, so muß z so gewählt werden, daß auch $m - cz$ diesen Theiler hat. Wenn nur positive ganze Zahlen als Werthe der Unbekannten gesucht werden, so sind die Gränzen der Lösungen leicht anzugeben. Ist nämlich einer der drei Coefficienten negativ, so ist die Anzahl der Lösungen unbegränzt; sind aber alle drei Coefficienten positiv, so muß, wenn die Unbekannten auch den Werth Null annehmen können,

$$x \overline{\overline{<}} \frac{m}{a},\ y \overline{\overline{<}} \frac{m}{b},\ z \overline{\overline{<}} \frac{m}{c},$$

und wenn die Unbekannten mindestens gleich 1 sein sollen, so muß

$x \overline{\overline{<}} \frac{m-b-c}{a}; y \overline{\overline{<}} \frac{m-a-c}{b}; z \overline{\overline{<}} \frac{m-a-b}{c}$ sein.

Anm. Ist z. B. $2x + 3y + z = 100$, so setze man zuerst $z = 1$. Alsdann ist $2x + 3y = 99$, folglich $x = 3w$; $y = 33 - 2w$.

Als Lösungen erhält man:

z =	1;	1;	1;	...... 1;
x =	3;	6;	9;	......45;
y =	31;	29;	27;	...... 3.

Nun setze man $z = 2$.

Alsdann ist $2x + 3y = 98$, folglich $x = 1 + 3w$; $y = 32 - 2w$.

Als Lösungen erhält man:

z =	2;	2;	2;	2;	...... 2;
x =	1;	4;	7;	10;	......46;
y =	32;	30;	28;	26;	...... 2.

Setzt man ferner für z die Zahlen 3, 4 ... 95 ein, so erhält man nach und nach sämmtliche Lösungen der Gleichung.

§. 85. Aufgaben.

I. Die Gleichungen

$$\begin{cases} 1)\ 4x - 6y + 3z = 18 \\ 2)\ 2x - 5y + 2z = \ \ 6 \end{cases}$$

nach x, y, z aufzulösen.

Auflös. Nach 1) ist $z = \frac{18 - 4x + 6y}{3}$; nach 2) ist $z = \frac{6 - 2x + 5y}{2}$.

Daher ist $36 - 8x + 12y = 18 - 6x + 15y$,

oder $3y = -2x + 18$.

Aus dieser Gleichung findet man die Lösungen

$$y = 2v,\ x = -3v + 9,$$

und ferner nach 1) $z = -6 + 8v$.

II. Die Zahlen zu bestimmen, die durch 5 dividirt den Rest 2, durch 6 dividirt den Rest 3, durch 7 dividirt den Rest 5 geben.

Auflösung. Es ist 1) $5x + 2 = 6y + 3$,

2) $7z + 5 = 6y + 3$.

Nach 1) ist $-6y = -5x + 1$,

daher 3) $\begin{cases} y = 5v - 1 \\ x = 6v - 1. \end{cases}$ (Vgl. §. 81, Anm.)

Setzt man den für y gefundenen Werth in 2) ein, so ist:

$$30v - 3 = 7z + 5, \text{ oder}$$

$$30v = 7z + 8.$$

Diese Gleichung giebt für v und z die Werthe:

$$v = 7w - 3;\ z = 30w - 14.$$

Setzt man den für v gefundenen Werth in 3) ein, so ist schließlich:

$$x = 42w - 19;$$
$$y = 35w - 16;$$
$$z = 30w - 14.$$

Da nun der Ausdruck $5x + 2 = 210w - 93$ die gesuchten Zahlen bezeichnete, so erhält man also die Resultate: 117; 117 + 210; 117 + 2 . 210 u. s. w.

B. Von den unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades.

§. 86. Aufgaben.

I. Die Gleichung $xy + x + y = a$ nach x und y aufzulösen.

Auflösung. Es ist $xy + y = a - x$,

$$y(x + 1) = a - x,$$

$$y = \frac{a - x}{x + 1} = -1 + \frac{a + 1}{x + 1}.$$

Soll die Lösung in ganzen Zahlen stattfinden, so ist x so zu wählen, daß $(x + 1)$ ein Faktor von $(a + 1)$ wird. Ist z. B. $a = 12$, so ist $a + 1 = 13$. Die Faktoren von 13 sind 1 und 13; deshalb kann $x = 0$, oder $x = 12$ sein, woraus sich für y die Werthe 12 und 0 ergeben.

II. Die Gleichung $xy + ax + by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Es ist $y = \frac{c - ax}{x + b} = -a + \frac{c + ab}{x + b}$. Man sucht nun sämmtliche Faktoren des Ausdrucks $c + ab$ und giebt x solche Werthe, daß $x + b$ jedesmal gleich einem dieser gefundenen Faktoren ist.

III. Die Gleichung $x^2 + xy + ax + by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Es ist $y = \frac{c - x^2 - ax}{b + x} = -x + b - a + \frac{ab - b^2 + c}{x + b}$. Im Uebrigen verfährt man wie bei II *).

IV. Die Gleichung $ax^2 + by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Es ist $y = \frac{c - ax^2}{b}$. Ist nun

1) $c = bm$, so ist $y = m - \frac{ax^2}{b}$, oder, wenn $x = bz$ gesetzt wird, $y = m - abz^2$. Ist hingegen

2) $c = ad^2$, so ist $y = a \,.\, \frac{d^2 - x^2}{b}$, oder, wenn $x = bv - d$ gesetzt wird, $y = a \,.\, \frac{d^2 - b^2v^2 + 2bvd - d^2}{b} = 2avd - abv^2$.

In diesen zwei Fällen ist also eine allgemeine Lösung möglich.

V. Die Gleichung $x^2 + ax + c = y^2$ in rationalen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Setzt man $y = x + b$, so ist

$$x^2 + ax + c = x^2 + 2bx + b^2,$$
$$x(a - 2b) = b^2 - c,$$
$$x = \frac{b^2 - c}{a - 2b},$$
$$\text{daher } y = \frac{ab - b^2 - c}{a - 2b}.$$

---

*) In den Aufgaben II und III dividirt man die Zähler der für y gefundenen Quotienten so lange durch die Nenner, bis die Zähler den Buchstaben x nicht mehr enthalten.

VI. Die Gleichung $ax^2 + bx + c^2 = y^2$ in rationalen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Setzt man $y = dx + c$, so ist

$$ax^2 + bx + c^2 = d^2x^2 + 2cdx + c^2,$$

$$ax^2 + bx = d^2x^2 + 2cdx,$$

$$ax + b = d^2x + 2cd,$$

$$x = \frac{2cd - b}{a - d^2},$$

$$\text{daher } y = \frac{cd^2 - bd + ac}{a - d^2}.$$

VII. Die Gleichung $x^2 + a = y^2$ in rationalen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Setzt man $y = x + p$, so ist

$$x^2 + a = x^2 + 2px + p^2,$$

$$\text{also } x = \frac{a - p^2}{2p},$$

$$y = \frac{a + p^2}{2p}.$$

Anm. Setzt man diese Werthe in der gegebenen Gleichung ein, und setzt man außerdem $a = q^2$, so erhält man die Gleichung

$$(p^2 - q^2)^2 - (2pq)^2 = (q^2 + p^2)^2,$$

welche zur Bestimmung der Pythagoräischen Dreiecke dienen kann.

VIII. Die Gleichung $ax^2 + bx + c = y^2$ in rationalen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Setzt man $ax^2 + bx + c = (mx + n)(vx + w)$ *) und

$$y^2 = (mx + n)^2 . r^2, \text{ so ist}$$

$$vx + w = (mx + n) . r^2$$

$$x = \frac{nr^2 - w}{v - mr^2},$$

$$\text{also } y = \left(\frac{vn - mw}{v - mr^2}\right) . r.$$

*) Ist diese Zerlegung nicht möglich, so ist auch die angegebene Auflösung nicht möglich.

Ist z. B. $6x^2 + 17x + 12 = y^2$, so setzt man

$$6x^2 + 17x + 12 = (2x + 3)(3x + 4),$$

$$y = (2x + 3)r.$$

Alsdann ist $x = \frac{3r^2 - 4}{3 - 2r^2}$.

Für $r = 1$ ist $x = -1$; für $r = 2$ ist $x = -\frac{8}{5}$ u. s. w.

Anm. 1. Die Zerlegung von $6x^2 + 17x + 12$ ist in folgender Art auszuführen. Es ist $x^2 + \frac{17}{6}x + 2 = 0$, wenn $x = -\frac{3}{2}$ oder $x = -\frac{4}{3}$ gesetzt wird; daher ist $x^2 + \frac{17}{6}x + 2 = (x + \frac{3}{2})(x + \frac{4}{3})$, ferner $6x^2 + 17x + 12 = (2x + 3)(3x + 4)$.

Anm. 2. Eine Lösung der vollständigen quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + cy + dy^2 + exy + f = 0$$

in rationalen Zahlen läßt sich nicht geben; die gegebenen Beispiele enthalten aber die wichtigsten auf elementarem Wege zu lösenden Aufgaben.

Aufgaben.

I. Gegebene Gleichungen.

1) $3x + 4y = 11$;

2) $2x - 3y = -5$;

3) $4y - 3x = 11$;

4) $3x - 2y = -5$;

5) $1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y = 1$;

6) $2x - 16\frac{3}{4} = -1\frac{3}{4}y$;

7) $5x - 12y + 8z = 17$;

8) $2x + 3y + 4z = 20$;

9) $\begin{cases} x = 3y + 1; \\ x = 5z + 2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{5}x = 4\frac{4}{5}y + 3; \\ \frac{1}{4}x = 2\frac{3}{4}z + 1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 17x + 11y + 3z = 880; \\ x + y + z = 100; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 8x - y - 5z = 19; \\ 7x + y - 4z = 23; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x + y + z = 20; \\ 10x - y - 5z = 24; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3; \\ 7x - 4y + 3z = 14; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}; \\ 4z = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}; \\ 5v = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3w - 2x = 36; \\ 2w - 3y = 24; \\ 7y - 4z = 20; \end{cases}$

17) $3x^2 = 8y;$*)

18) $x^2 + 5y = 64;$

19) $2x^2 + 7y = 72;$

20) $2x^2 + 5y = 500.$

II. Aufgaben, für welche die Gleichungen erst gesucht werden müssen.

21) Welche Zahlen geben die Reste 1 oder 2, je nachdem man sie durch 3 oder durch 5 dividirt?

22) Welche Zahlen geben die Reste 2, 3, 9, je nachdem man sie durch 3, 7, 10 dividirt?

23) Welche Zahlen geben die Reste 3, 1, 0, 5, je nachdem man sie durch 5, 6, 7, 8 dividirt?

24) Die Zahl 1793 in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine bei der Division durch 11 den Rest 3, der andere bei der Division durch 37 den Rest 19 giebt. Welche Theile sind es?

25) Die Zahl 1840 in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine bei der Division durch 12 den Rest 1, der andere bei der Division durch 54 den Rest 45 giebt. Welche Theile sind es?

26) Die Zahl 124 in drei Theile von solcher Beschaffenheit zu zerlegen, daß, wenn man den ersten mit $4\frac{1}{2}$, den zweiten mit $3\frac{1}{6}$, den dritten mit $1\frac{1}{4}$ multiplicirt und die drei Produkte addirt, 400 herauskommt. Welche Theile sind es?

27) Die Zahl 76 in 4 Theile von solcher Beschaffenheit zu zerlegen, daß, wenn man den ersten mit 20, den zweiten mit $10\frac{1}{2}$, den dritten mit 7, den vierten mit 4 multiplicirt und die Produkte addirt, 707 herauskommt. Welche Theile sind es?

28) 100 Personen, Männer, Frauen und Kinder, verzehrten zusammen 29 Thlr. 10 Sgr., und zwar ein Mann 17, eine Frau 11, ein Kind 3 Sgr. Wie viel Männer, Frauen und Kinder waren es?

29) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Differenz und Produkt zusammen genommen 97 betragen. Welche Zahlen sind es? (Siehe II.)

30) Von welchen zwei Zahlen betragen Quotient und Summe zusammengenommen 37? (Siehe III.)

31) Wie zerlegt man den Bruch $^{230}/_{77}$ in zwei andere Brüche, deren Nenner 7 und 11 sind?

32) Es soll die Summe von drei Zahlen, wie auch von je zweien derselben ein Quadrat geben. Welche Zahlen sind es? (Siehe VII.)

33) Wenn man zu 36 das Siebenfache einer gewissen Zahl hinzu addirt, erhält man eine Quadratzahl. Welche Zahl ist es? (Siehe IV.)

---

*) Für die Aufgaben 17—20 vergleiche IV.

Auflösungen.

1) $x=1+4m$; $y=2-3m$; **2)** $x=3m-1$; $y=2m+1$; **3)** $x=4m-1$; $y=3m+2$; **4)** $x=2m-1$; $y=3m+1$; **5)** $x=5m+4$; $y=3m+2$; **6)** $x=7m+4$; $y=5-8m$; **7)** $x=12m-4z+1$; $y=5m-z-1$; **8)** $x=2,5,3,1$; $y=4, 2, 2, 2$; $z=1, 1, 2, 3$; **9)** $x=7+15m$; $y=2+5m$; $z=1+3m$; **10)** $x=37+88m$; $y=4+11m$; $z=3+8m$; **11)** $x=2+4m$; $y=69-7m$; $z=29+3m$; **12)** $x=4+3m$; $y=3-m$; $z=2+5m$; **13)** $x=5+m$; $y=6-5m$; $z=4+3m$; **14)** $x=2m+3$; $y=5m-2$; $z=2m-5$; **15)** $x=25+60m$; $y=4+10m$; $z=2+5m$; $v=1+4m$; **16)** $x=9+9m$; $y=4+4m$; $z=2+7m$; $w=18+6m$; **17)** $x=4n$; $y=6n^2$; **18)** $x=5n\mp2$; $y=12-5n^2\pm4n$; daher z. B. $x=2, 3, 7$; $y=12, 11, 3$; **19)** $x=7v\mp1$; $y=10-14v^2\pm4v$; daher z. B. $x=1$; $y=10$; **20)** $x=5v$; $y=100-10v^2$; daher z. B. $x=5, 10, 15$; $y=90, 60, 10$; **21)** 7, 22 u. s. w., überhaupt $7+15n$; **22)** 59, 269 u. s. w., überhaupt $59+210n$; **23)** 133, 973 u. s. w., überhaupt $133+840n$; **24)** 146, 1647; 553, 1240; 960, 833; 1367, 426; 1774, 19; **25)** 13 und 1827; 661 und 1179; 1309 und 531; **26)** 17, 99, 8; 40, 60, 24; 63, 21, 40; **27)** 24, 2, 2, 48; 23, 4, 3, 46; 22, 6, 4, 44 u. s. w. **28)** 38, 6, 56; 34, 13, 53; 30, 20, 50 u. s. w.; **29)** 13, 7; 17, 5; 25, 3; 33, 2; 49, 1; 49, 1; **30)** 18, 18; 18, 1; **31)** $\frac{5}{7}$, $\frac{25}{11}$; $\frac{12}{7}$, $\frac{14}{11}$; $\frac{19}{7}$, $\frac{3}{11}$; **32)** 41, 80, 320; 22, 42, $68\frac{1}{4}$ u. s. w.; **33)** $x=-5+7m^2+2m$, daher z. B. $x=4, 19, 27$.

Achtes Capitel.

Von den unendlichen Reihen.

A. Von den Funktionen und von der Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 87. Erklärung.

Ein Ausdruck, welcher den Buchstaben x enthält, dessen Werth sich also ändert, sobald sich der Werth von x ändert, heißt eine Funktion von x. Die Funktionen sind, wie die algebraischen Gleichungen, entweder transcendent, oder algebraisch. Eine algebraische Funktion von x heißt ra-

tional, wenn nur ganze Potenzen von x in ihr vorkommen, hingegen irrational, wenn x unter dem Wurzelzeichen steht. Sie heißt ferner ganz, wenn die etwa vorkommenden Nenner von x unabhängig sind; im entgegengesetzten Falle heißt sie gebrochen.

Eine rationale ganze Funktion von x ist vom m^{ten} Grade, wenn die höchste in ihr vorkommende Potenz von x den Exponenten m hat. Sie läßt sich nach den aufeinanderfolgenden Potenzen von x ordnen und hat alsdann die Form

$$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots + a_mx^m.$$

In dieser Form heißt sie steigend; bei entgegengesetzter Ordnung der Glieder heißt sie fallend.

Die Coefficienten a, a_1, a_2 u. s. w. sind von dem Fortschreitungsbuchstaben x unabhängig und bedeuten, ebenso wie x, irgend eine complexe Zahl, also einen Ausdruck von der Form $p + qi$.

§. 88. Erklärung.

Eine steigende Funktion*) von x heißt eine unendliche Reihe, wenn die Anzahl der Glieder eine unbegränzte ist. Eine unendliche Reihe hat die geordnete Form:

$$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \text{ in infinitum.}$$

Sie heißt convergent, wenn sich die Summe der Glieder einem Ausdrucke von endlicher Größe mehr und mehr nähert, ohne ihn je erreichen zu können; im entgegengesetzten Falle heißt sie divergent. So ist z. B.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ in inf. eine convergente (§. 45),

$1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ in inf. eine divergente Reihe.

§. 89. Lehrsätze.

Verbindet man zwei ganze Funktionen von x durch eine der vier ersten Operationen, ist hierbei die eine Funktion vom m^{ten}, die andere vom n^{ten} Grade, und ist $m > n$, so ergiebt sich Folgendes:

1) die Summe oder Differenz der beiden Funktionen ist eine ganze Funktion und ist höchstens vom m^{ten} Grade.
2) das Produkt der beiden Funktionen ist eine ganze Funktion vom $(m + n)^{ten}$ Grade.

*) Wo nicht das Gegentheil bemerkt ist, soll unter einer Funktion immer eine rationale und ganze verstanden werden.

3) Der Quotient der zweiten Funktion in die erste **kann** eine ganze Funktion vom $(m - n)^{\text{ten}}$ Grade sein.

Anm. Die Beweise ergeben sich aus den gewöhnlichen Regeln des Rechnens. Aus den Regeln des Dividirens folgt, daß der unter 3) erwähnte Quotient eine ganze Funktion vom $(m-n)^{\text{ten}}$ Grade sein **kann**, aber nicht nothwendig eine **ganze** Funktion sein **muß**, insofern bei der Division ein Rest übrig bleiben kann. Der Rest läßt sich aber zuweilen, ebenfalls nach den Regeln des Dividirens, in eine unendliche Reihe verwandeln. Es ist z. B.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots$$

§. 90. Lehrsätze.

1) Ist der Werth einer unendlichen Reihe für jeden nur möglichen Werth von x gleich Null, so ist jeder einzelne Coefficient gleich Null.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist für jeden Werth von x:

$$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\cdots = 0.$$

Diese Gleichung muß also auch richtig bleiben, wenn $x = 0$ ist, und es muß folglich $a = 0$ sein.

Alsdann ergiebt sich ferner, daß

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = 0,$$

oder $$x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots) = 0,$$

oder $$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots = 0 \text{ ist.}$$

Da nun diese Reihe wiederum für jeden Werth von x den Werth 0 erhält, so muß aus dem vorher angeführten Grunde auch $a_1 = 0$ sein. In derselben Art läßt sich aber nachweisen, daß auch jeder der folgenden Coefficienten gleich Null ist.

2) Sind zwei unendliche Reihen für jeden Werth des Fortschreitungsbuchstabens gleich groß, so sind die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Coefficienten einander gleich.

Beweis. Die beiden Reihen seien:

$$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\cdots$$

$$b + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots\cdots$$

Sobald nun x in beiden Reihen denselben Werth hat, so ist

$$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = b + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots,$$

oder $$(a-b) + (a_1-b_1)x + (a_2-b_2)x^2 + (a_3-b_3)x^3 + \cdots = 0.$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von x richtig ist, so folgt aus 1), daß $a-b=0$, $(a_1-b_1)=0$, $(a_2-b_2)=0$ u. s. w., oder daß

$$a=b,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2 \text{ u. s. w. ist.}$$

§. 91. Zusatz.

Wenn eine unendliche Reihe schnell convergirt, d. h. wenn sich die Summe der aufeinanderfolgenden Glieder sehr bald dem Gränzwerthe nähert, den die Summe sämmtlicher Glieder nicht überschreiten kann, so läßt sich der annähernde Werth der Reihe für beliebige Werthe von x ohne große Schwierigkeit berechnen.

Die Aufgabe, den Werth einer gegebenen Funktion für beliebige Werthe von x annähernd anzugeben, ist daher als gelöst zu betrachten, sobald sich die gegebene Funktion in Form einer unendlichen, schnell convergirenden Reihe darstellen läßt. Die Möglichkeit einer solchen Umformung ist für einen einzelnen Fall bereits in §. 89 angedeutet.

§. 92. Erklärung.

Zur Verwandlung einer gegebenen Funktion von x in eine unendliche Reihe bedient man sich im Allgemeinen der Methode der unbestimmten Coefficienten. Man bezeichnet nämlich die gegebene Funktion zunächst durch die Form

$$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots$$

und versteht hierbei unter den Buchstaben a, a_1, a_2,... unbekannte, erst noch näher zu bestimmende Coefficienten. Es muß nun die Funktion auf jeden Fall gewisse Eigenschaften haben, welche sich durch Gleichungen ausdrücken lassen, und diese Gleichungen müssen ferner auch für die angenommene Reihe gelten. So kann man zu Gleichungen zwischen verschiedenen Reihen gelangen und aus denselben mit Hülfe der in §. 90 aufgestellten Sätze die Unbekannten a, a_1 u. s. w. zu bestimmen suchen. Zum weiteren Verständniß dieses Verfahrens, welches in den späteren Abschnitten dieses Capitels öfters angewendet werden wird, mögen die nachfolgenden Beispiele dienen.

§. 93. Aufgaben.

I. Die gebrochene Funktion $\frac{1}{1-x}$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Man setze

$$\frac{1}{1-x} = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots$$

Hieraus folgt, daß

$$1 = (1-x)(a + a_1x + a_2x^2 + \ldots.)$$
$$= a + (a_1 - a)x + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x^3 + \ldots.$$

oder daß $0 = (a - 1) + (a_1 - a)x + (a_2 - a_1)x^2 + \ldots.$ ist.

Da diese Gleichung für jeden Werth von x richtig bleibt, so sind nach §. 90 alle einzelnen Coefficienten gleich Null. Es ist also

1) $a - 1 = 0$, folglich $a = 1$,

2) $a_1 - a = 0$, folglich $a_1 = a = 1$,

3) $a_2 - a_1 = 0$, folglich $a_2 = a_1 = 1$,

daher $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$ (Vergl. §. 89, Anm.).

Anm. Die Reihe convergirt, wenn $x < 1$ ist (§. 45).

II. Die gebrochene Funktion $\frac{a + a_1x + a_2x^2 + \ldots}{b + b_1x + b_2x^2 + \ldots}$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Man setze

$$\frac{a + a_1x + a_2x^2 + \ldots}{b + b_1x + b_2x^2 + \ldots} = c + c_1x + c_2x^2 + \ldots\ldots$$

Alsdann ist

$$a + a_1x + a_2x^2 + \ldots = (c + c_1x + c_2x^2 + \ldots).(b + b_1x + b_2x^2 + \ldots)$$
$$= bc + (bc_1 + b_1c)x + (bc_2 + b_1c_1 + b_2c)x^2 + \ldots$$

Da diese Reihen für jeden Werth von x einander gleich sind, so ist

1) $a = bc$, daher $c = a : b$;

2) $bc_1 + b_1c = a_1$, daher $c_1 = (a_1 - b_1c) : b$;

3) $bc_2 + b_1c_1 + b_2c = a_2$, daher $c_2 = (a_2 - b_2c - b_1c_1) : b$; u. s. w.

Anm. zu II. Jeder Coefficient der gesuchten Reihe wird mit Hülfe der vorhergehenden Coefficienten bestimmt. Reihen, bei welchen dies der Fall ist, nennt man recurrirende Reihen, und die Formel, nach welcher die

Coefficienten bestimmt werden, heißt die **recurrirende** Formel. Diese würde bei der Aufgabe II.), wie leicht zu sehen ist, folgende Gestalt haben:

$$c_n = (a_n - b_n\, c - b_{n-1}c_1 - b_{n-2}c_2 - b_{n-3}c_3 - \ldots) : b.$$

Den Gegensatz zur recurrirenden Formel bildet die **independente** Formel, bei welcher jeder Coefficient aus irgend einer Funktion seiner Ordnungszahl bestimmt wird. Die Formel kann zuweilen ganz einfach sein, wie z. B. in der Aufgabe I.) die independente Formel für das allgemeine Glied $a_n x^n$ die Gestalt hat: $a_n = 1$.

B. Von dem allgemeinen binomischen Lehrsatze.

§. 94. Erklärung.

Der **binomische Lehrsatz** im engern Sinne giebt die Entwicklung der Funktion $(a + b)^x$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe, jedoch unter der Voraussetzung, daß der Exponent x eine positive, ganze Zahl ist. Der **allgemeine** binomische Lehrsatz giebt dieselbe Entwicklung unter der Voraussetzung, daß der Exponent x eine reelle Zahl bedeutet.

§. 95. Erklärung.

Der Binomialcoefficient $p_{(m)}$ heißt **allgemein**, wenn m eine positive, ganze Zahl, hingegen p nur eine reelle Zahl bedeutet. (Vergl. §. 53.) Nach dieser Erklärung ist noch immer

$$p_{(m)} = \frac{p.(p-1)(p-2)\ldots\ldots[p-(m-1)]}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\;m}, \text{ also z. B.}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{(3)} = \frac{\frac{1}{2}.(-\frac{1}{2}).(-\frac{3}{2})}{1\;.\;2\;.\;3} = \frac{1}{16}, \text{ ferner}$$

$$(-5)_{(3)} = \frac{(-5).(-6).(-7)}{1\;.\;2\;.\;3} = -35,$$

aber die in §. 53 aufgestellten Sätze 1—3 sind alsdann nur für den einzelnen Fall richtig, daß p eine positive, ganze Zahl bezeichnet.

§. 96. Lehrsätze.

Für die **allgemeinen** Binomialcoefficienten gelten folgende Sätze:

1) $(p+q)_{(2)} = p_{(2)} + p.q + q_{(2)}$;

2) $(p+q)_{(3)} = p_{(3)} + p_{(2)} \cdot q + p \cdot q_{(2)} + q_{(3)}$;

3) $(p+q)_{(m)} = p_{(m)} + p_{(m-1)} \cdot q + p_{(m-2)} \cdot q_{(2)} + p_{(m-3)} \cdot q_{(3)} + \ldots\ldots$

Beweis zu 1). Es ist

$$(p+q)_{(2)} = \frac{(p+q)(p+q-1)}{2} = \frac{p(p+q-1)}{2} + \frac{q(p+q-1)}{2}$$

$$= \frac{p(p-1)}{2} + \frac{pq}{2} + \frac{qp}{2} + \frac{q(q-1)}{2} = p_{(2)} + p \cdot q + q_{(2)}.$$

Beweis zu 2). Es ist

$$(p+q)_{(3)} = (p+q)_{(2)} \cdot \frac{p+q-2}{3} = (p_{(2)} + p \cdot q + q_{(2)}) \cdot \left(\frac{p+q-2}{3}\right)$$

$$= p_{(2)} \cdot \frac{p+q-2}{3} + pq \cdot \frac{p+q-2}{3} + q_{(2)} \cdot \frac{p+q-2}{3}$$

$$= p_{(2)} \cdot \frac{p-2}{3} + p_{(2)} \cdot \frac{q}{3} + pq \cdot \frac{p-1}{3} + pq \cdot \frac{q-1}{3} +$$

$$q_{(2)} \cdot \frac{q-2}{3} + q_{(2)} \cdot \frac{p}{3}$$

$$= p_{(3)} + p_{(2)} \cdot \frac{q}{3} + 2 \cdot p_{(2)} \cdot \frac{p}{3} + 2 \cdot q_{(2)} \cdot \frac{q}{3} + q_{(3)} + q_{(2)} \cdot \frac{p}{3}$$

$$= p_{(3)} + p_{(2)} \cdot q + p \cdot q_{(2)} + q_{(3)}.$$

Beweis zu 3). Der Satz ist für den besondern Fall richtig, daß m den bestimmten Werth n hat (z. B. 2 oder 3). Läßt sich nun beweisen, daß er auch dann noch richtig bleibt, wenn man $m = n + 1$ setzt, so ist er allgemein gültig. Es ist also nach der Voraussetzung

$$(p+q)_{(n+1)} = (p+q)_{(n)} \cdot \frac{p+q-n}{n+1}$$

$$= (p_{(n)} + p_{(n-1)} \cdot q + p_{(n-2)} \cdot q_{(2)} + \ldots\ldots) \cdot \left(\frac{p+q-n}{n+1}\right)$$

$$= p_{(n)} \cdot \frac{p+q-n}{n+1} + p_{(n-1)} \cdot q \cdot \frac{p+q-n}{n+1} +$$

$$p_{(n-2)} \cdot q_{(2)} \cdot \frac{p+q-n}{n+1} + \ldots$$

Hierbei ist

$$a)\ p_{(n)}\cdot\frac{p+q-n}{n+1}=p_{(n)}\cdot\frac{p-n}{n+1}+p_{(n)}\cdot\frac{q}{n+1}=p_{(n+1)}+p_{(n)}\cdot\frac{q}{n+1};$$

$$b)\ p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{p+q-n}{n+1}=p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{p-(n-1)+(q-1)}{n+1}$$

$$=p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{p-(n-1)}{n+1}+p_{(n-1)}\cdot q\cdot\frac{q-1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot p_{(n)}\cdot q+\frac{2\cdot p_{(n-1)}\cdot q_{(2)}}{n+1};$$

$$c)\ p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}\cdot\frac{p+q-n}{n+1}=p_{(n-2)}\cdot q_{(2)}\cdot\frac{p-(n-2)+(q-2)}{n+1}$$

$$=\frac{n-1}{n+1}\cdot p_{(n-1)}\cdot q_{(2)}+\frac{3\cdot p_{(n-2)}\cdot q_{(3)}}{n+1}.$$

Die übrigen Glieder lassen sich in derselben Art umformen, und man erhält daher eine entsprechende Gleichung für das allgemeine Glied $p_{(n-v)}\cdot q_{(v)}$, wenn man in der unter c) aufgestellten Gleichung $(v-1)$ statt 1, v statt 2 und $(v+1)$ statt 3 einsetzt und nur den Nenner $n+1$ unverändert läßt. Setzt man nun alle diese umgeformten Ausdrücke in der für $(p+q)_{(n+1)}$ aufgestellten Gleichung ein, so ist

$$(p+q)_{(n+1)}=p_{(n+1)}+\frac{p_{(n)}\cdot q}{n+1}+\frac{n\cdot p_{(n)}\cdot q}{n+1}+\frac{2\cdot p_{(n-1)}\cdot q_{(2)}}{n+1}+\frac{(n-1)p_{(n-1)}\cdot q_{(2)}}{n+1}+\ldots\ldots$$

$$=p_{(n+1)}+p_{(n)}\cdot q+p_{(n-1)}\cdot q_{(2)}+\ldots$$

Dieses Resultat entspricht der allgemeinen Formel, und dieselbe ist also hiermit bewiesen.

§. 97. Lehrsatz.

Bezeichnet m eine beliebige reelle Zahl, so ist

$$1+m\cdot x+m_{(2)}\cdot x^2+m_{(3)}\cdot x^3+\ldots=(1+x)^m.$$

Beweis. Die Richtigkeit des Lehrsatzes ist bereits für den besonderen Fall nachgewiesen, daß m eine positive ganze Zahl, oder Null bezeichnet (§. 64). Für alle übrigen Fälle mag der unbekannte Werth der angegebenen Reihe vorläufig durch f_m bezeichnet werden. Es ist also

$$f_m = 1 + m \cdot x + m_{(2)} \cdot x^2 + m_{(3)} \cdot x^3 + \ldots$$

ferner $f_n = 1 + n \cdot x + n_{(2)} \cdot x^2 + n_{(3)} \cdot x^3 + \ldots$

Multiplicirt man nun beide Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$\begin{aligned} f_m \cdot f_n &= (1 + m \cdot x + m_{(2)} \cdot x^2 + \ldots) \cdot (1 + n \cdot x + n_{(2)} \cdot x^2 + \ldots) \\ &= 1 + (m + n) \cdot x + (m_{(2)} + m \cdot n + n_{(2)}) \cdot x^2 + \\ &\qquad (m_{(3)} + m_{(2)} \cdot n + m \cdot n_{(2)} + n_{(3)}) \cdot x^3 + \ldots \\ &= 1 + (m+n) \cdot x + (m+n)_{(2)} \cdot x^2 + (m+n)_{(3)} \cdot x^3 + \ldots \text{ (§. 96)}, \end{aligned}$$

daher $f_m \cdot f_n = f_{(m+n)}$.

Die Reihen f_m und f_n, in welchen m und n reelle Zahlen bezeichnen, haben also die Eigenschaft, daß ihr Produkt gleich der Reihe $f_{(m+n)}$ ist.

Es sei nun m eine positive ganze Zahl, ferner $n = -m$. Dann ist

$$f_m \cdot f_{-m} = f_o = 1, \text{ daher}$$
$$f_{-m} = 1 : f_m.$$

In diesem Falle ist aber $f_m = (1 + x)^m$, also

$$f_{-m} = 1 : (1 + x)^m = (1 + x)^{-m}.$$

Der Lehrsatz ist also richtig, wenn m eine negative ganze Zahl bedeutet.

Es ist nun ferner

$$f_{(m+o+v+w+\ldots)} = f_m \cdot f_o \cdot f_v \cdot f_w \ldots$$

also auch $f_{(m+m+m+m+\ldots)} = f_m \cdot f_m \cdot f_m \cdot f_m \ldots$

oder $f_{mn} = (f_m)^n$,

wenn n die Anzahl der Summanden m bezeichnet.

Setzt man in dieser Gleichung $m = \mp \frac{r}{n}$, und sind hierbei r und n positive ganze Zahlen, so erhält man:

$$f_{\mp r} = \left(f_{\mp \frac{r}{n}}\right)^n.$$

Nach dem Vorigen ist aber

$$f_{\mp r} = (1 + x)^{\mp r},$$

daher auch $\left(f_{\mp \frac{r}{n}}\right)^n = (1 + x)^{\mp r}$,

oder $f_{\mp \frac{r}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^{\mp r}} = (1+x)^{\mp \frac{r}{n}}$.

Der Lehrsatz ist also auch richtig, wenn m eine (positive oder negative) gebrochene Zahl bedeutet, und der binomische Lehrsatz gilt daher für alle möglichen reellen Exponenten.

Anm. Der oben bewiesene Satz ist nur äußerlich von dem binomischen Lehrsatze in seiner gewöhnlichen Form (§. 64) verschieden, denn für jeden reellen Werth von m ist

$$(a+b)^m = a^m \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m \cdot \left\{1+m\cdot\frac{b}{a}+m_{(2)}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\ldots\right\}$$

$$= a^m + m\cdot a^{m-1}b + m_{(2)}\cdot a^{m-2}b^2 + \ldots$$

§. 98. Zusatz.

Der allgemeine binomische Lehrsatz läßt sich zur Berechnung einer beliebigen Wurzel aus einer gegebenen Zahl benutzen, sobald nur die Reihe schnell genug convergirt. Dies tritt ein, wenn in dem Ausdrucke $(a+b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$ der Nenner a sehr groß im Verhältniß zu b ist. Um dieser Bedingung zu genügen, setzt man z. B.

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{128} = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{125+3} = \tfrac{5}{4}\sqrt[3]{1+0{,}024}.$$

Benutzt man nun den binomischen Lehrsatz, so erhält man schon aus sieben Gliedern das Resultat

$$(1+0{,}024)^{\frac{1}{3}} = 1{,}007936839915\ldots,$$

und es ist folglich

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{5}{4}\sqrt[3]{1+0{,}024} = 1{,}25992104989\ldots.$$

C. Von der Entwicklung der Potenzen in Reihen.

§. 99. Aufgabe.

Die Potenz a^x, worin a positiv, x reell ist, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Setzt man

1) $a^x = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots.$
wo b_0, b_1, b_2 u. s. w. näher zu bestimmende, von x unabhängige Coefficienten sind, so ist auch

2) $a^y = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \dots$

3) $a^{(x+y)} = b_0 + b_1(x+y) + b_2(x+y)^2 + b_3(x+y)^3 + b_4(x+y)^4 + \dots\dots$

Nun ist aber $a^{(x+y)} = a^x \,.\, a^y$, daher auch

4) $b_0 + b_1(x+y) + b_2(x+y)^2 + b_3(x+y)^3 + \dots\dots =$

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots) \,.\, (b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots).$$

Ordnet man beide Seiten der Gleichung 4) nach x, so erhält man:

$$x^0(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots) + x^1(b_1 + 2b_2 y + 3b_3 y^2 + \dots) + \dots =$$

$$x^0(b_0 b_0 + b_0 b_1 y + b_0 b_2 y^2 + \dots)$$

$$+ x^1(b_1 b_0 + b_1 b_1 y + b_1 b_2 y^2 + \dots) + \dots.$$

Beide Reihen, von welchen blos die zwei ersten Glieder gegeben sind, müssen für jeden Werth von x einander gleich sein, und deshalb sind auch die zu gleichen Potenzen von x gehörenden Coefficienten einander gleich. Es ist daher

5) $b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots = b_0(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots)$,

6) $b_1 + 2b_2 y + 3b_3 y^2 + 4b_4 y^3 + \dots =$

$$b_1 b_0 + b_1 b_1 y + b_1 b_2 y^2 + b_1 b_3 y_3 + \dots$$

Aus 5) ergiebt sich, daß b_0 gleich 1 oder gleich 0 sein muß. Es ist aber $b_0 = 1$, weil a^0 gleich 1 ist.

Aus 6) ergiebt sich die Gleichheit zweier nach y geordneten Reihen, in denen also die zu gleichen Potenzen von y gehörenden Coefficienten gleich sein müssen. Folglich ist

α) $b_1 = b_1 \,.\, b_0 = b_1$;

β) $2b_2 = b_1 \,.\, b_1$, also $b_2 = \frac{(b_1)^2}{2!}$;

γ) $3b_3 = b_1 \,.\, b_2 = \frac{(b_1)^3}{2!}$, also $b_3 = \frac{(b_1)^3}{3!}$;

δ) $4b_4 = b_1 \,.\, b_3 = \frac{(b_1)^4}{3!}$, also $b_4 = \frac{(b_1)^4}{4!}$;

ε) $nb_n = b_1 \,.\, b_{(n-1)}$. Für bestimmte Werthe von n, z. B. für $n = 5$, ist nun $b_{(n-1)} = \frac{(b_1)^{n-1}}{(n-1)!}$. Setzt man diesen Werth ein, so ist $b_n = \frac{(b_1)^n}{n!}$. Es wird also jeder folgende Werth nach

derselben Formel gebildet, wie der vorangehende, und man erhält als independente Formel: $b_n = \frac{(b_1)^n}{n!}$.

Setzt man die gefundenen Werthe in Gleichung 1) ein, so ist

$$7)\ a^x = 1 + b_1 x + \frac{(b_1)^2}{2!} x^2 + \frac{(b_1)^3}{3!} x^3 + \cdots,$$

und wenn man $x = 1$ setzt, so ist

$$a = 1 + b_1 + \frac{(b_1)^2}{2!} + \frac{(b_1)^3}{3!} + \cdots$$

Der Werth des Coefficienten b_1 läßt sich nicht direkt aus dem Werthe von a ableiten, aber man kann umgekehrt für beliebige Werthe von b_1 die zugehörigen Werthe von a finden. Setzt man z. B. $b_1 = 1$, so ist

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2{,}71828182845\ldots = e.$$

Ist also $a = 2{,}71828\cdots = e$, so ist $b_1 = 1$, und folglich ist

$$8)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Die Zahl e ist die Basis der natürlichen Logarithmen (§. 36); es ist daher $a = e^{\log.\mathrm{nat}.a}$, folglich $a^x = e^{(\log.\mathrm{nat}.a).x} = e^{\alpha x}$, wenn α den natürlichen Logarithmen von a bezeichnet.

Hieraus aber und aus 8) erhält man die Gleichung:

$$9)\ a^x = e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \cdots$$

Anm. Die unter 8) und 9) angegebenen Reihen sind eindeutig, wenn jede vorkommende Bruchpotenz nur den absoluten Wurzelwerth bezeichnet, und wenn jeder Logarithme reell ist.

§. 100. Zusatz.

Die Convergenz der eben gefundenen Reihen ergiebt sich leicht aus einer Vergleichung derselben mit der Reihe

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots \text{ (in inf.)},$$

welche convergirt, sobald $a < 1$ ist (§. 45).

Es muß nämlich in der Reihe 9), wenn α und x reelle Zahlen von endlicher Größe sind, nothwendig einmal ein Glied $\frac{(\alpha x)^v}{v!}$ auftreten, in wel-

chem $v > \alpha x$ ist. Bis zu diesem Gliede ist die Summe der vorhergehenden Glieder eine endliche. Wird dieses Glied mit p bezeichnet, so sind die folgenden Glieder:

$$p \cdot \frac{\alpha x}{v+1}; \quad p \cdot \frac{(\alpha x)^2}{(v+1)(v+2)}; \quad p \cdot \frac{(\alpha x)^3}{(v+1)(v+2)(v+3)}; \text{ u. s. w.}$$

Die Summe dieser und der folgenden Glieder ist nun kleiner als die Summe der Ausdrücke:

$$p \cdot \frac{\alpha x}{v+1}; \quad p \cdot \frac{(\alpha x)^2}{(v+1)^2}; \quad p \cdot \frac{(\alpha x)^3}{(v+1)^3}; \text{ u. s. w.}$$

Die Summe der letztern entspricht aber der Form $1+a+a^2+a^3+\ldots$ und muß also, da zugleich $(v+1) > \alpha x$ ist, eine endliche Größe haben. Die Reihen 8) und 9) sind folglich convergent.

§. 101. Erklärung.

Unter der Voraussetzung, daß a eine positive, v aber eine complexe Zahl bedeutet, und daß $\log . \text{nat} . a = \alpha$ ist, soll noch immer

$$\text{die Reihe } 1+v+\frac{v^2}{2!}+\frac{v^3}{3!}+\ldots\ldots \quad \text{durch } e^v,$$

$$\text{die Reihe } 1+\alpha v+\frac{(\alpha v)^2}{2!}+\frac{(\alpha v)^3}{3!}+\ldots \quad \text{durch } a^v = e^{\alpha v}$$

bezeichnet werden, und es soll alsdann e^v eine natürliche, a^v eine künstliche Potenz heißen. (Vergl. den Schlußsatz von §. 24.)

Anm. Die reelle Potenz ist ein besonderer Fall der künstlichen. Mit natürlichen und künstlichen Potenzen rechnet man nach den Sätzen, welche für die reellen Potenzen gelten. Die Beweise ergeben sich theils aus §. 99, theils sind sie den in Cap. II geführten ähnlich.

§. 102. Zusatz.

Setzt man in der natürlichen Potenz e^v für v den Werth xi ein, wobei x eine reelle Zahl bezeichnen soll, so ist

$$e^{xi} = 1+xi+\frac{(xi)^2}{2!}+\frac{(xi)^3}{3!}+\frac{(xi)^4}{4!}+\frac{(xi)^5}{5!}+\cdots$$

$$= 1+xi-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}i+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}i-\cdots {}^{*)}$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right).$$

---

*) Vergl. §. 23, 6–9.

Letztere zwei Reihen convergiren, da sie (§. 100) sogar convergiren würden, wenn alle Glieder additiv wären. Die Ausdrücke e^{xi} und a^{xi} lassen sich daher als complexe Zahlen darstellen. Ist aber $e^{xi} = p + qi$, so ist nothwendig $e^{-xi} = p - qi$.

Setzt man ferner $v = x + yi$, wobei x und y reelle Zahlen bedeuten sollen, so ist $e^{x+yi} = e^x \,.\, e^{yi}$, und dieser Ausdruck bedeutet ebenfalls eine complexe Zahl.

Anm. Vergl. §. 99, Anm.

§. 103. Erklärung.

Unter dem natürlichen Logarithmen einer complexen Zahl $p + qi$ soll diejenige complexe Zahl verstanden werden, mit welcher man e potenziren muß, um $p + qi$ zu erhalten. Ist also

$e^{x+yi} = p + qi$ (Vergl. §. 102), so ist

$x + yi = \log.\text{ nat.}\,(p + qi)$.

Anm. 1. In dieser erweiterten Erklärung ist die Erklärung des reellen Logarithmen als besonderer Fall enthalten.

Anm. 2. Die Erklärung der künstlichen Potenz läßt sich jetzt noch dahin erweitern, daß in dem Ausdrucke a^v nicht bloß v, sondern auch a eine complexe Zahl sein kann. Eine Untersuchung dieses ganz allgemeinen Falles gehört indessen nicht mehr zu den Aufgaben der elementaren Mathematik.

D. Von der Entwicklung der Logarithmen in Reihen.

§. 104. Aufgabe.

Den Ausdruck $\log.\text{ nat.}\,(1+x)$ oder $\text{Log}\,(1+x)$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Es ist nach §. 99, 9:

$$1)\quad (1+x)^m = 1 + \Big(\text{Log}(1+x)\Big)m + \Big(\text{Log}(1+x)\Big)^2 \frac{m^2}{2!} + \ldots\ldots$$

Ferner ist nach §. 97:

$$2)\quad (1+x)^m = 1 + mx + m_{(2)}x^2 + \ldots\ldots$$

oder, wenn diese Reihe nach Potenzen von m geordnet wird,

$$3)\quad (1+x)^m = 1 + Am + Bm^2 + \ldots\ldots$$

wo A, B u. s. w. näher zu bestimmende Coefficienten sind.

Aus 1) und 3) folgt, daß Log $(1+x)=A$ ist, gleich der Summe der Zahlenfaktoren, die zu der Potenz m^1 gehören. Man hat also die Reihe 2) nach m zu ordnen. Das allgemeine Glied derselben ist

$$m_{(v)}x^v = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots[m-(v-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\,v}\,.x^v\,.$$

Führt man die Multiplicationen im Zähler aus und ordnet nach Potenzen von m, so gehört zur Potenz m^1 der Faktor $[1.2.3\ldots(v-1)].x^v=(v-1)!\,x^v$, und zwar ist dieser positiv, wenn v ungerade, negativ, wenn v gerade ist. In dem allgemeinen Gliede ist also

$$\mp\frac{(v-1)!}{v!}\,.x^v = \mp\frac{1}{v}\,.x^v$$

der gesuchte Faktor. Setzt man in demselben die Werthe 1, 2, 3 u. s. w für v ein, so erhält man

$$A = x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\ldots\ldots = \text{Log}\,(1+x).$$

Anm. 1. Diese Reihe ist eindeutig, wenn jede Bruchpotenz nur den absoluten Wurzelwerth bezeichnet, und es gelten alsdann die Sätze, welche für die reellen Logarithmen aufgestellt worden sind (Vergl. §. 101, Anm.). Es ist also z. B. Log $(a^2)=2$ Log a, aber nicht auch Log $(a^2)=2$ Log $(-a)$.

Anm. 2. In der gefundenen Reihe kann x eine complexe Zahl bezeichnen (Vergl. §. 103).

§. 105. Zusatz.

Es ist nach vorigem §.:

$$1)\ \text{Log}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

$$2)\ \text{Log}(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Subtrahirt man 2) von 1), so erhält man:

$$3)\ \text{Log}(1+x)-\text{Log}(1-x)=\text{Log}\frac{1+x}{1-x}=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right\},$$

oder, wenn $(1+x):(1-x)=y$ gesetzt wird,

$$4)\ \text{Log}\,y=2\left\{\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\ldots\right\}.$$

Diese Reihe convergirt, sobald y eine positive Zahl bedeutet. Für diesen Fall ist nämlich der absolute Werth des Ausdrucks $\frac{y-1}{y+1}$ kleiner als 1, und unter dieser Voraussetzung convergirt selbst die Reihe

$$\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\ldots.$$

Anm. Die gefundene Reihe convergirt außerdem, wenn $y=p+qi$ ist, und divergirt, wenn y eine negative Zahl bezeichnet.

§. 106. Zusatz.

Die im vorigen §. unter 4) angegebene Reihe ist zwar zur numerischen Berechnung der Logarithmen schon brauchbar, doch läßt sich ihr eine noch bequemere Form geben. Setzt man nämlich

$$y=\frac{n+z}{z},\ \text{also}\ \frac{y-1}{y+1}=\frac{z}{2n+z},\ \text{so ist}$$

$$1)\ \mathrm{Log}\,\frac{n+z}{n}=2\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\ldots\right\}.$$

Nun ist $\mathrm{Log}\,\frac{n+z}{n}=\mathrm{Log}\,(n+z)-\mathrm{Log}\,n$, daher

$$2)\ \mathrm{Log}\,(n+z)=\mathrm{Log}\,n+2.\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\ldots\ldots\right\}.$$

In dieser Reihe nimmt die Größe der Glieder desto schneller ab, je größer n im Verhältniß zu z ist, jedoch kann $\mathrm{Log}\,(n+z)$ nur mit Hülfe von $\mathrm{Log}\,n$ berechnet werden. Setzt man $n=1$, $z=1$, so ist $\mathrm{Log}\,n=0$, daher

$$\mathrm{Log}\,2=2\left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5+\tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3})^7+\ldots\ldots\right].$$

§. 107. Zusatz.

Aus $\mathrm{Log}\,a$, dem natürlichen Logarithmen von a, läßt sich (nach §. 35) der Brigg'sche ($\log a$) leicht berechnen. Es ist nämlich:

$$\log a=\frac{\mathrm{Log}\,a}{\mathrm{Log}\,10}=\frac{\mathrm{Log}\,a}{2{,}30259\ldots}=(0{,}43429\ldots).\mathrm{Log}\,a.$$

Die Zahl $0{,}43429\ldots=\mu$ nennt man den Modul des Brigg'schen Systems. Es ist also $\log a=\mu\,\mathrm{Log}\,a$.

§. 108. Zusatz.

Bezeichnet in 2) des §. 106 n eine sehr große, z eine sehr kleine absolute Zahl, so kann man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, die Glieder mit höhern Exponenten weglassen. Man erhält alsdann:

$$1)\ \mathrm{Log}\,(n+z) - \mathrm{Log}\,n = \frac{z}{n};$$

$$2)\ \mathrm{Log}\,(n+z') - \mathrm{Log}\,n = \frac{z'}{n}.$$

Dividirt man nun 1) durch 2), so ist:

$$[\mathrm{Log}\,(n+z) - \mathrm{Log}\,n] : [\mathrm{Log}\,(n+z') - \mathrm{Log}\,n] = z : z',$$

d. h. bei einer Reihe von großen, aber nur wenig von einander verschiedenen Zahlen verhalten sich die Differenzen der (natürlichen oder Brigg'schen) Logarithmen wie die Differenzen der Zahlen selbst.

Kennt man also z. B.:

$$\log 13567 = 4{,}1324838,$$
$$\log 13568 = 4{,}1325158,$$

so findet man die Logarithmen von 13567,1, von 13567,2, von 13567,3 u. s. w., indem man die Differenz jener beiden Logarithmen oder die Zahl 0,0000320 in 10 Theile theilt, und dann zu log 13567 einen, zwei, drei u. s. w. dieser Theile hinzuaddirt.

Hierauf gründet sich die Berechnung der proportionirten Theile, die man in den Logarithmentafeln findet.

E. Von der Entwicklung der goniometrischen Funktionen in Reihen.

§. 109. Aufgabe.

Den Ausdruck cos x in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln unter der Voraussetzung, daß x einen spitzen Winkel bezeichnet, dessen Größe durch die Bogenlänge für den Radius 1 ausgedrückt ist.*)

Auflösung. Setzt man

$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

so ist zunächst $a_0 = 1$, weil cos 0 = 1 ist.

*) Vergl. Planimetrie §. 169.

Da ferner $\frac{1}{2}\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y)=\cos x \,.\, \cos y$ ist, so ist auch

$$\tfrac{1}{2}[1+a_1(x+y)+a_2(x+y)^2+..] + \tfrac{1}{2}[1+a_1(x-y)+a_2(x-y)^2+..]$$
$$= (1+a_1x+a_2x^2+..).(1+a_1y+a_2y^2+...).$$

Ordnet man beide Seiten der Gleichung nach x und y, so müssen die auf beiden Seiten zu gleichen Potenzen von x und y gehörigen Coefficienten einander gleich sein. Im ersten Theile der Gleichung können aber keine ungeraden Potenzen von y vorkommen, und es müssen dieselben daher auch im zweiten Theile der Gleichung wegfallen, oder alle Coefficienten von ungerader Ordnungszahl (a_1, a_3 u. s. w.) müssen gleich Null sein. Entwickelt man nun die Gleichung unter dieser Voraussetzung und ordnet nach y, so erhält man:

$$y^0.(1+a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6+....)+$$
$$y^2.(a_2+4_{(2)}a_4x^2+6_{(2)}a_6x^4+8_{(2)}a_8x^6+....)+....$$
$$= y^0.(1+a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6+....)+$$
$$y^2.(a_2+a_2a_2x^2+a_2a_4x^4+a_2a_6x^6+....)+....$$

In diesen beiden Reihen müssen die zu gleichen Potenzen von y gehörigen Coefficienten einander gleich sein. Daher ist

$$a_2+4_{(2)}a_4x^2+6_{(2)}a_6x^4+.... = a_2+a_2a_2x^2+a_2a_4x^4+a_2a_6x^6+....$$

Da diese Reihen nach x geordnet sind, so ist wiederum:

$$a_2=a_2;\ 4_{(2)}a_4=a_2a_2;\ 6_{(2)}a_6=a_2a_4;.\ (2n)_{(2)}a_{2n}=a_2a_{2n-2}.$$

Es ist folglich

1) $a_2=a_2$;

2) $a_4=(a_2)^2:4_{(2)}=(a_2)^2:\frac{4!}{2^2}=\frac{(2a_2)^2}{4!}$;

3) $a_6=(a_2a_4):6_{(2)}=a_2.\frac{(2a_2)^2}{4!}:6_{(2)}=\frac{(2a_2)^3}{6!}$;

4) $a_{2n}=\frac{(2a_2)^n}{(2n)!}$.

Schließlich ist also:

$$\cos x=1+\frac{(2a_2)}{2!}.x^2+\frac{(2a_2)^2}{4!}.x^4+\frac{(2a_2)^3}{6!}.x^6+....,$$

und man hat daher nur noch den Ausdruck a_2 zu bestimmen.

§. 110. Aufgabe.

Den Ausdruck sin x in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln unter der Voraussetzung, daß x die nämliche Bedeutung hat, wie in §. 109.

Auflösung. Setzt man

$$\sin x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots,$$

so ist $b_0 = 0$, weil $\sin 0 = 0$ ist.

Da ferner $\frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y) = \sin x . \sin y$ ist, so folgt, wenn man die im vorigen §. gefundene Reihe benutzt:

$$\frac{1}{2}\left\{1 + \frac{(2a_2)}{2!}(x-y)^2 + \frac{(2a_2)^2}{4!}(x-y)^4 + \ldots\right\} -$$

$$\frac{1}{2}\left[1 + \frac{(2a_2)}{2!}(x+y)^2 + \frac{(2a_2)^2}{4!}(x+y)^4 + \ldots\right]$$

$$= [b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots] . [b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots].$$

Im ersten Theile der Gleichung fallen alle geraden Potenzen von x und y weg. Diese müssen daher auch im zweiten Theile der Gleichung wegfallen, oder es müssen die Coefficienten mit gerader Ordnungszahl (b_2, b_4 u. s. w.) gleich Null sein. Entwickelt man unter dieser Voraussetzung die Gleichung und ordnet nach y, so ist

$$-y^1\left[\frac{2(2a_2)}{2!}x + \frac{4(2a_2)^2}{4!}x^3 + \frac{6(2a_2)^3}{6!}x^5 + \ldots\right] - \ldots\ldots$$

$$= + y^1 [b_1 b_1 x + b_1 b_3 x^3 + b_1 b_5 x^5 + \ldots\ldots\ldots] + \ldots\ldots$$

Es ist also $b_1 b_1 x + b_1 b_3 x^3 + b_1 b_5 x^5 \ldots = -\frac{2(2a_2)}{2!}x - \frac{4(2a_2)^2}{4!}x^3 - \ldots,$

daher:

1) $(b_1)^2 = -2a_2$;

2) $b_1 b_3 = \frac{-(2a_2)^2}{3!} = \frac{-(b_1)^4}{3!}$, oder $b_3 = \frac{-(b_1)^3}{3!}$;

3) $b_1 b_5 = \frac{-(2a_2)^3}{5!} = \frac{(b_1)^6}{5!}$, oder $b_5 = \frac{(b_1)^5}{5!}$;

4) $b_1 b_7 = \frac{-(2a_2)^4}{7!} = \frac{-(b_1)^8}{7!}$, oder $b_7 = \frac{-(b_1)^7}{7!}$;

u. s. w.

Setzt man die gefundenen Werthe der Coefficienten in der ursprünglichen Reihe ein, ferner den Werth $(b_1)^2$ statt $-2a_2$ in der für $\cos x$ gefundenen Reihe (§. 109), so erhält man schließlich:

$$\sin x = b_1 x - \frac{(b_1)^3}{3!}x^3 + \frac{(b_1)^5}{5!}x^5 - \frac{(b_1)^7}{7!}x^7 + \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{(b_1)^2}{2!}x^2 + \frac{(b_1)^4}{4!}x^4 - \frac{(b_1)^6}{6!}x^6 + \ldots\ldots$$

§. 111. Zusatz.

Die für die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ gefundenen Reihen enthalten noch den unbestimmten Coefficienten b_1. Den Werth desselben findet man aber durch folgende Betrachtung:

Es ist $\sin x = b_1 x - \frac{(b_1)^3}{3!}x^3 + \ldots.$, daher

$$\frac{\sin x}{x} = b_1 - \frac{(b_1)^3}{3!}x^2 + \ldots.$$

Setzt man $x = 0$, so ist $b_1 = \frac{\sin 0}{0}$. Es bezeichnet also b_1 den Gränzwerth des Ausdrucks $\frac{\sin x}{x}$, d. h. denjenigen Werth, welchem sich dieser Ausdruck um so mehr nähert, je kleiner x genommen wird.

So lange nun x nicht größer als der Viertelkreisbogen genommen wird, so ist stets $\sin x < x$, ferner $\operatorname{tg} x > x$, daher $\frac{\sin x}{x} < 1$, ferner $\frac{\sin x}{\cos x} > x$ oder $\frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Der Werth des Ausdrucks $\frac{\sin x}{x}$ liegt also zwischen den Gränzen 1 und $\cos x$. Ist aber $x = 0$, so ist $\cos x = 1$, und für diesen Fall liegt also der Werth des Ausdrucks $\frac{\sin x}{x}$ zwischen den Gränzen 1 und 1. Es ist folglich

$$b_1 = 1.$$

---

*) Vergl. Trigonometrie §§. 17 und 24.

Setzt man diesen Werth in den früher gefundenen Reihen ein, so ergiebt sich:

$$1)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$2)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Anm. Aus der in diesem §. angestellten Betrachtung ergiebt sich der Grund, weshalb der Winkel x durch seinen Bogen bezeichnet werden muß.

§. 112. Zusatz.

Die Convergenz der in vorigem §. gefundenen Reihen folgt aus §. 102. Aus §. 102 lassen sich aber noch folgende Gleichungen ableiten. Es ist

$$1)\quad e^{+xi} = \cos x + i \sin x;$$

$$2)\quad e^{-xi} = \cos x - i \sin x; \text{ daher}$$

$$3)\quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2};$$

$$4)\quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i};$$

$$5)\quad (\cos x \mp i \sin x)^m = e^{\mp mxi} = \cos mx \mp i \sin mx.$$

§. 113. Erklärung.

Die in §. 111 gefundenen Reihen sind beziehlich gleich den trigonometrischen Funktionen sin x und cos x, wenn x die in §. 109 angegebene Bedeutung hat. Ist hingegen x ein ganz allgemeiner Ausdruck, so hat jede dieser Reihen zwar noch irgend einen bestimmten Werth, aber dieser steht zunächst in keiner Beziehung zu den erwähnten trigonometrischen Funktionen und ist also erst noch zu finden. Für den Fall, daß x ein allgemeiner Ausdruck ist, sollen die betreffenden Reihen kürzer durch Sin x und Cos x bezeichnet werden.

§. 114. Lehrsätze.

Für die Ausdrücke Sin x und Cos x gelten folgende Sätze;

$$1)\quad \mathrm{Sin}^2 x + \mathrm{Cos}^2 x = 1; {}^*)$$

$$2)\quad \mathrm{Sin}\,(x \mp y) = \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,y \mp \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,y;$$

$$3)\quad \mathrm{Cos}\,(x \mp y) = \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y \pm \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\,y.$$

*) $\mathrm{Sin}^2 x$ ist die kürzere Schreibart für $(\mathrm{Sin}\,x)^2$, $\mathrm{Cos}^2 x$ für $(\mathrm{Cos}\,x)^2$.

Beweis zu 1. Es ist $\mathrm{Sin}^2 x + \mathrm{Cos}^2 x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^2 =$

$$\frac{e^{2xi} + e^{-2xi} - 2e^{xi} \cdot e^{-xi}}{-4} + \frac{e^{2xi} + e^{-2xi} + 2e^{xi} \cdot e^{-xi}}{4} = 1.$$

Beweis zu 2. Es ist

$$\mathrm{Sin}\, x \cdot \mathrm{Cos}\, y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$$

$$= \frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x+y)i} + e^{(x-y)i} - e^{-(x-y)i}}{2i \cdot 2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(x+y) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(x-y).$$ Ebenso ist

$$\mathrm{Cos}\, x \cdot \mathrm{Sin}\, y = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(x+y) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(x-y).$$

Addirt oder subtrahirt man die gefundenen zwei Ausdrücke, so erhält man:

$$\mathrm{Sin}\, x \cdot \mathrm{Cos}\, y \mp \mathrm{Cos}\, x \cdot \mathrm{Sin}\, y = \mathrm{Sin}\,(x \mp y).$$

Beweis zu 3. Er wird geführt, wie der Beweis zu 2.

§. 115. Zusatz.

Aus den eben bewiesenen Formeln werden in der Trigonometrie verschiedene Reihen neuer Formeln abgeleitet. Da nun die Grundformeln der Trigonometrie nach vorigem §. auch dann noch richtig bleiben, wenn die in ihnen vorkommenden Buchstaben nicht Winkel, sondern beliebige Ausdrücke bedeuten, so gilt dasselbe auch von allen übrigen abgeleiteten Formeln. Mit den Ausdrücken Sin x und Cos x rechnet man also nach den nämlichen Formeln, welche für die Ausdrücke sin x und cos x gelten.

§. 116. Zusatz.

Bezeichnet man die (noch unbekannte) Bogenlänge, welche dem Centriwinkel 2R entspricht, während der Radius gleich 1 ist, durch den Buchstaben π, so ist

$$\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}\pi = 1, \text{ weil } \sin R = 1,$$
$$\mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2}\pi = 0, \text{ " } \cos R = 0 \text{ ist.}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und der in §. 114 aufgestellten Sätze läßt sich nun leicht nachweisen, daß die Werthe der Reihen Sin x und

Cos x, so lange x reell ist, immer zwischen den Gränzen + 1 und — 1 liegen. *)

§. 117. Aufgabe.

Den Werth der Zahl π zu bestimmen.

Auflösung. Es ist

1) $e^{+xi} = \cos x + i \sin x$, 2) $e^{-xi} = \cos x - i \sin x$,

folglich $\frac{e^{+xi}}{e^{-xi}} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}$, oder $e^{2xi} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$.

Nimmt man von letzterer Gleichung die natürlichen Logarithmen, so ist

$$2xi = \operatorname{Log}\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x} = 2\left\{i.\operatorname{tg}x - i.\frac{\operatorname{tg}^3x}{3} + i.\frac{\operatorname{tg}^5x}{5} - \cdots\right\} \text{(nach §.105, 3)}.$$

oder $x = \operatorname{tg}x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x - \ldots$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun in verschiedener Art der Werth der Zahl π ableiten.

1) Setzt man $x = \frac{1}{4}\pi$, so ist $\operatorname{tg} x = 1$, folglich

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots.$$

Diese Reihe convergirt indessen zu wenig, als daß sich π bequem daraus berechnen ließe.

2) Setzt man $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$, so ist

a) $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \ldots$

Da ferner $\operatorname{tg}(x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi}{1+\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi} = \frac{\operatorname{tg}x - 1}{1 + \operatorname{tg}x}$ **),

also im vorliegenden Falle

$$\operatorname{tg}(x - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\frac{1}{5} - 1}{1 + \frac{1}{5}} = -\tfrac{2}{3} \text{ ist,}$$

so erhält man:

b) $x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \ldots$

Subtrahirt man nun Gleichung b) von Gleichung a), so erhält man den Werth von $\frac{1}{4}\pi$.

---

*) Die vollständige Entwicklung der betreffenden Gleichungen findet sich in der Trigonometrie und kann daher hier übergangen werden.

**) Trigonometrie §. 29, 3.

Die Gleichung b) läßt sich jedoch in noch bequemerer Form darstellen. Leitet man aus $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$ folgende Werthe*) ab:

$$\operatorname{tg} 2x = \tfrac{5}{12}; \ \operatorname{tg} 4x = \tfrac{120}{119}, \text{ so ist}$$

$$\operatorname{tg}(4x - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\operatorname{tg} 4x - 1}{1 + \operatorname{tg} 4x} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \tfrac{1}{239}, \text{ folglich}$$

$$\text{c) } 4x - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{239} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{239})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{239})^5 - \ldots.$$

Aus a) und c) ergiebt sich aber die Gleichung

$$\tfrac{1}{4}\pi = 4[\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{5})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5 - \ldots.]$$
$$- [\tfrac{1}{239} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{239})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{239})^5 - \ldots.],$$

und aus dieser ergiebt sich für die Zahl π der Werth

$$3{,}14159265358979323846\ldots.$$

Neuntes Capitel.

Von den endlichen Summen- und Differenzenreihen.

A. Von den Summenreihen.

§. 118. Erklärung.

Aus der Reihe der natürlichen Zahlen kann man eine neue Reihe bilden, wenn man, vom ersten Gliede anfangend, die Summe der ersten 2, 3, 4 u. s. w. Zahlen bestimmt; aus dieser zweiten Reihe kann man auf dieselbe Art eine dritte bilden, aus dieser eine vierte u. s. w. Die so entstandenen Reihen nennt man Summenreihen oder Reihen der figurirten Zahlen von der 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Ordnung. Es besteht also

die 1ste Ordnung aus den Zahlen:	1, 2, 3, 4, 5, 6....
die 2te " " "	1, 3, 6, 10, 15, 21....
die 3te " " "	1, 4, 10, 20, 35, 56....
die 4te " " "	1, 5, 15, 35, 70, 126....

u. s. w.

---

*) Es ist $\operatorname{tg} 2x = 2\operatorname{tg} x : (1 - \operatorname{tg}^2 x)$. (Trigon. §. 26, 1.)

Aus der Bildung der einzelnen Glieder geht hervor, daß das n^{te} Glied einer beliebigen Reihe gleich den n ersten Gliedern der vorhergehenden Reihe, daher z. B. $20 = 1 + 3 + 6 + 10$ ist. Das n^{te} Glied der m^{ten} Ordnung wird bezeichnet durch T_m^n (terminus), die Summe der n ersten Glieder der m^{ten} Ordnung durch S_m^n.

§. 119. Lehrsätze.

1) $T_m^n = S_{m-1}^n$;

2) $T_m^n = (n + m - 1)_{(m)}$;

3) $S_m^n = (n + m)_{(m+1)}$.

Beweis zu 1. Er ergiebt sich aus der Erklärung des §. 118.

Beweis zu 2. Es ist für die erste Ordnung:

$$T_1^n = n_{(1)};\ S_1^n = \frac{n\,.\,(n+1)}{2} = (n + 1)_{(2)} \text{ (nach §. 40).}$$

Ferner ist für die zweite Ordnung:

$$T_2^n = S_1^n = (n + 1)_{(2)}.$$

Für die zwei ersten Ordnungen ist also der Lehrsatz richtig.

Um die Richtigkeit auch für die dritte Ordnung zu beweisen, stellt man den Satz hin, daß wenn $T_3^h = (h + 2)_{(3)}$ ist, auch $T_3^{h+1} = (h + 3)_{(3)}$ sein muß. Nun ist $T_3^{h+1} = T_3^h + T_2^{h+1} = (h+2)_{(3)} + (h+2)_{(2)} = (h+3)_{(3)}$ (§. 53, 4). Wenn also für irgend einen Werth von h die Gleichung $T_3^h = (h + 2)_{(3)}$ richtig ist, so gilt der Lehrsatz 2) auch für die dritte Ordnung. Es ist aber, wenn man $h = 2$ setzt, $4_{(3)} = 4$, und dies ist nach §. 118 das 2^{te} Glied der dritten Ordnung.

In derselben Art beweist man die Richtigkeit des Lehrsatzes auch für die folgenden Ordnungen.

Beweis zu 3. Er folgt aus 1 und 2.

Anm. Es ergiebt sich aus 2), daß sämmtliche figurirten Zahlen Binomialcoefficienten sind. Liest man dieselben (in §. 118) von links nach rechts in der Diagonale, also 1, (1, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 6, 4), u. s. w., so erhält man die Binomialcoefficienten in derselben Ordnung, wie man sie bei der Bildung der aufeinander folgenden Potenzen von $a + b$ erhält.

§. 120. Zusatz.

In der m^{ten} Ordnung ist für die ersten $(x+1)$ Glieder nach vorigem §.:

$$m_{(m)}+(m+1)_{(m)}+(m+2)_{(m)}+\ldots+(m+x)_{(m)}=(m+x+1)_{(m+1)}.$$

Nach diesem Satze ist z. B.

$$3_{(3)}+4_{(3)}+5_{(3)}+\ldots+20_{(3)}=21_{(4)},\text{ oder}$$

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+18.19.20=(18.19.20.21):4.$$

§. 121. Zusatz.

Wie aus der Reihe der natürlichen Zahlen, so lassen sich auch aus jeder andern arithmetischen Progression durch das in §. 118 angegebene Verfahren neue Reihen ableiten.

Beispiele.

	Erste Ordnung:	Zweite Ordnung:
a)	1, 3, 5, 7, 9,....	1, 4, 9, 16, 25,....
b)	1, 4, 7, 10, 13,....	1, 5, 12, 22, 35,....
c)	1, 5, 9, 13, 17,....	1, 6, 15, 28, 45,....
d)	1, 6, 11, 16, 21,....	1, 7, 18, 34, 55,....

u. s. w.

Die einzelnen Glieder dieser Reihen, wie auch die Summen der n ersten Glieder einer jeden Ordnung lassen sich ebenfalls durch eine Formel bestimmen, doch gelingt dies am einfachsten erst mit Hülfe der in den folgenden §§. entwickelten Differenzenreihen.

Anm. Die in den §§. 118 und 121 angeführten Zahlen der zweiten Ordnung führen besondere Namen. Man nennt die Zahlen

e)	1, 3, 6, 10, 15....	Triagonalzahlen,
f)	1, 4, 9, 16, 25....	Quadratzahlen,
g)	1, 5, 12, 22, 35....	Pentagonalzahlen,
h)	1, 6, 15, 28, 45....	Hexagonalzahlen,
i)	1, 7, 18, 34, 55....	Heptagonalzahlen,

u. s. w.

Die Zahlen der Reihen von f) an heißen auch Polygonalzahlen.

Der Grund dieser Benennungen ist, daß man mit Hülfe regulärer Vielecke diese Zahlen darstellen kann, durch bestimmte Gruppirung der natürlichen Zahlen auf Ecken und Seiten jener Vielecke. Die Gruppirung ist z. B. folgende für die

Trigonalzahlen:	Quadratzahlen:
1	1
2 3	2 4
4 5 6	5 3 9
7 8 9 10	10 6 8 16
11 12 13 14 15	11 7 15
16 17 18 19 20 21	12 14
	13

Von dieser Eigenschaft rührt auch der Name „figurirte Zahlen" her, der indessen gewöhnlich nur den in §. 118 angeführten Zahlen gegeben wird.

B. Von den Differenzenreihen.

§. 122. Erklärung.

Aus einer Reihe gegebener Zahlen kann man eine neue Reihe dadurch bilden, daß man die Unterschiede von je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern berechnet. Diese neue Reihe nennt man die erste Differenzenreihe der gegebenen. Bezeichnet man die Glieder der ursprünglichen Reihe mit a_1, a_2, a_3, a_4 u. s. w., so sind die Glieder der ersten Differenzenreihe: $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ u. s. w.

Aus dieser bildet man in derselben Weise die zweite Differenzenreihe, aus dieser die dritte u. s. w. Bezeichnet man die Glieder der ersten Differenzenreihe kürzer durch b_1, b_2, b_3, b_4 u. s. w., so erhält man für die zweite die Glieder $b_2 - b_1$, $b_3 - b_2$, $b_4 - b_3$ u. s. w., oder kürzer c_1, c_2, c_3 u. s. w., für die dritte die Glieder $c_2 - c_1$, $c_3 - c_2$, $c_4 - c_3$ u. s. w. oder kürzer d_1, d_2, d_3 u. s. w. Alle diese Reihen bilden das Schema:

$$\begin{array}{lccccccccc} & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5\ldots \\ \text{I. Diff.} & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4\ldots & \\ \text{II. Diff.} & & & c_1 & & c_2 & & c_3\ldots & & \\ \text{III. Diff.} & & & & d_1 & & d_2\ldots & & & \end{array}$$

u. s. w.

Es lassen sich nun zwar von jeder beliebigen Reihe Differenzenreihen ableiten, doch haben dieselben nur dann eine besondere Wichtigkeit, wenn in irgend einer Differenzenreihe sämmtliche Glieder einander gleich sind. Alsdann nennt man die ursprüngliche Reihe eine arithmetische Progression höherer Ordnung, und zwar der m^{ten} Ordnung, wenn die Glieder der m^{ten} Differenzenreihe einander gleich sind. Die Polygonalzahlen bilden also Progressionen der zweiten Ordnung.

§. 123. Aufgabe.

Die Glieder der verschiedenen Differenzenreihen durch die Glieder der ursprünglichen Reihe auszudrücken.

Auflösung. Wendet man nicht die Abkürzungen b_1, c_1, d_1 u. s. w. an, sondern schreibt die wirklichen Differenzen hin, so erhält man statt des obigen Schema's das folgende:

	a_1		a_2		a_3		a_4		a_5
I. D.		a_2-a_1		a_3-a_2		a_4-a_3		a_5-a_4	
II. D.			$a_3-2a_2+a_1$		$a_4-2a_3+a_2$		$a_5-2a_4+a_3$		
III. D.				$a_4-3a_3+3a_2-a_1$		$a_5-3a_4+3a_3-a_2$			

u. s. w.

Es ist nach demselben:

$b_1 = a_2 - a_1$; $b_2 = a_3 - a_2$; u. s. w.

$c_1 = a_3 - 2a_2 + a_1$; $c_2 = a_4 - 2a_3 + a_2$; u. s. w.

$d_1 = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1$; $d_2 = a_5 - 3a_4 + 3a_3 - a_2$; u. s. w.

Um $e_1 = d_2 - d_1$ zu erhalten, hätte man in dem für d_1 gefundenen Ausdrucke alle Zeiger um 1 zu erhöhen und dann d_1 abzuziehen (vergl. Schema). Man würde alsdann dasselbe Verfahren anwenden, als wenn man aus $(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$ die folgende Potenz $(a-1)^4$ berechnen wollte, muß also auch dieselben Zahlencoefficienten erhalten. Für die m^{te} Differenzenreihe sind es daher die Coefficienten der Reihe $(a-1)^m$. Man erhält z. B. für die fünfte Differenzenreihe die Gleichungen:

$$f_1 = a_6 - 5a_5 + 10a_4 - 10a_3 + 5a_2 - a_1;$$

$$f_{n+1} = a_{n+6} - 5a_{n+5} + 10a_{n+4} - 10a_{n+3} + 5a_{n+2} - a_{n+1}.$$

§. 124. Aufgabe.

Die Glieder der ursprünglichen Reihe durch das erste Glied derselben und das erste Glied einer jeden Differenzenreihe auszudrücken.

Auflösung. Es sind die Glieder a_1, b_1, c_1, d_1, u. s. w. gegeben. Aus diesen erhält man (vergl. Schema):

$$a_2 = a_1 + b_1;\ b_2 = b_1 + c_1;\ c_2 = c_1 + d_1;\ \text{u. s. w.}$$

Aus den Gliedern a_2, b_2, c_2 u. s. w. erhält man aber:

$$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + 2b_1 + c_1;$$
$$b_3 = b_2 + c_2 = b_1 + 2c_1 + d_1;$$
$$c_3 = c_2 + d_2 = c_1 + 2d_1 + e_1 \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen erhält man ferner:

$$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + 3b_1 + 3c_1 + d_1 \text{ u. s. w.}$$

Es ergiebt sich wiederum, wie in §. 123, daß man dieselben Coefficienten erhalten muß, die man bei der Bildung der verschiedenen Potenzen von $(a + 1)$ erhalten würde, und die allgemeine Formel ist daher:

$$a_n = a_1 + (n-1)b_1 + (n-1)_{(2)}c_1 + (n-1)_{(3)}d_1 + \ldots .$$

Die Reihe bricht ab mit dem ersten Gliede derjenigen Differenzenreihe, deren Glieder sämmtlich einander gleich sind.

Anm. Mit Hülfe der eben gefundenen Gleichung lassen sich in einer begränzten Reihe beliebiger Zahlen die einzelnen Glieder durch einen allgemeinen Ausdruck in der Art bezeichnen, daß derselbe als das allgemeine Glied einer arithmetischen Progression höherer Ordnung erscheint, und man also die gegebene Reihe mit Hülfe desselben fortsetzen kann. Die fortgesetzte Reihe hat alsdann eine Differenzenreihe mit gleichen Gliedern (vergl. §. 122). Um für die Glieder der ersten u. s. w. Differenzenreihe einen allgemeinen Ausdruck zu erhalten, braucht man nur diese Reihe als die ursprüngliche anzusehen; in der angegebenen Formel hat man alsdann b_n statt a_n, b_1 statt a_1, c_1 statt b_1 u. s. w. zu setzen.

§. 125. Aufgabe.

Die Summe der ersten n Glieder der ursprünglichen Reihe anzugeben.

Auflösung. Bezeichnet man diese Summe durch Sa_n, so ist also

$$Sa_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Schreibt man nun statt der Glieder $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_3, a_2, a_1$ die im vorigen §. gefundene Reihe, so ist:

$$Sa_n = \begin{cases} a_n \\ +a_{n-1} \\ +a_{n-2} \\ + \\ \vdots \\ +a_3 \\ +a_2 \\ +a_1 \end{cases} = \begin{cases} a_1 + (n-1)b_1 + (n-1)_{(2)}c_1 + (n-1)_{(3)}d_1 + \ldots \\ +a_1 + (n-2)b_1 + (n-2)_{(2)}c_1 + (n-2)_{(3)}d_1 + \ldots \\ +a_1 + (n-3)b_1 + (n-3)_{(2)}c_1 + (n-3)_{(3)}d_1 + \ldots \\ + \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ +a_1 + 3b_1 + 3_{(2)}c_1 + 3_{(3)}d_1 + \ldots \\ +a_1 + 2b_1 + 2_{(2)}c_1 \\ +a_1 + 1b_1 \end{cases}$$

Addirt man die übereinanderstehenden Ausdrücke nach §. 120, so erhält man die Gleichung

$$Sa_n = na_1 + n_{(2)}b_1 + n_{(3)}c_1 + n_{(4)}d_1 + \ldots$$

Anm. Mit Hülfe der eben gefundenen Gleichung läßt sich die Summe der ersten n Glieder einer jeden Reihe angeben, in welcher irgend eine Differenzenreihe gleiche Glieder hat. Vorzugsweise sind unter den Reihen dieser Art zu bemerken sämmtliche Summenreihen in weitester Bedeutung (§. 121), ferner die Reihe $1^x + 2^x + 3^x + 4^x + \ldots$

§. 126. Aufgaben.

I. Eine arithmetische Progression höherer Ordnung hat die aufeinanderfolgenden Glieder 2, 3, 10. Das allgemeine Glied derselben zu bestimmen.

Auflösung. Die Differenzenreihen sind

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 3 & & 10 \\ & 1 & & 7 & \\ & & 6 & & \end{array}$$

Es ist daher $a_n = 2 + 1\,(n-1) + 6\,(n-1)_{(2)} = 3n^2 - 8n + 7$.

Setzt man in diesem Ausdrucke $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, so erhält man die Reihe

$$2\ ,\ 3\ ,\ 10\ ,\ 23\ ,\ 42\ ,\ldots\ .$$

II. Eine arithmetische Progression höherer Ordnung hat die aufeinanderfolgenden Glieder 20, 35, 56, 84. Das allgemeine Glied derselben zu bestimmen.

Auflösung. Die Differenzenreihen sind

$$\begin{array}{ccccccc} 20 & & 35 & & 56 & & 84 \\ & 15 & & 21 & & 28 & \\ & & 6 & & 7 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} a_n &= 20 + 15\,(n-1) + 6(n-1)_{(2)} + 1\,(n-1)_{(3)} \\ &= 6_{(3)} + 6_{(2)}(n-1) + 6(n-1)_{(2)} + (n-1)_{(3)} \\ &= (6+n-1)_{(3)} = (n+5)_{(3)}\ (§.\ 96,\ 2). \end{aligned}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $n = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$, so erhält man die Reihe

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56,\ 84,\ 120,\ \ldots$$

§. 127. Aufgaben.

I. Die Summe der n ersten Pentagonalzahlen anzugeben.

Auflösung. Die Differenzenreihen sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 5 & & 12 & & 22 & & 35 \\ & 4 & & 7 & & 10 & & 13 & \\ & & 3 & & 3 & & 3 & & \end{array}$$

Folglich ist $S = n + 4\,n_{(2)} + 3\,n_{(3)} = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$.

II. Die Summe der n ersten Quadratzahlen anzugeben.

Auflösung. Die Differenzenreihen sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 \\ & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

Folglich ist $S = n + 3\,n_{(2)} + 2\,n_{(3)} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

III. Die Summe der n ersten Kubikzahlen anzugeben.

Auflösung. Die Differenzenreihen sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 \\ & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & \\ & & 12 & & 18 & & 24 & & \\ & & & 6 & & 6 & & & \end{array}$$

Folglich ist $S = n + 7\,n_{(2)} + 12\,n_{(3)} + 6\,n_{(4)} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$.

IV. Die Anzahl der Kugeln zu berechnen, welche zu einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet sind und in n Reihen übereinander liegen.

Auflösung. In den aufeinanderfolgenden Schichten ist die Anzahl der Kugeln, wenn man von der Spitze beginnt:

$1;\quad 1+2;\quad 1+2+3;\quad 1+2+3+4;$ u. s. w.

oder $1;\quad 3;\quad 6;\quad 10;$ u. s. w. (Triagonalzahlen).

Daher ist $S = (n+2)_{(3)}$ (nach §. 119).

V. Die Anzahl der Kugeln zu berechnen, welche zu einer vierseitigen Pyramide mit quadratischem Querschnitt aufgeschichtet sind und in n Schichten übereinander liegen.

Auflösung. Die Anzahl der Kugeln in den einzelnen Schichten ist:

$$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ldots$$

Daher ist $S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ (nach II).

VI. Die Anzahl der Kugeln zu berechnen, welche in n Schichten übereinander liegen, von denen jede die Form eines Rechtecks hat, wenn zugleich in der obersten Schicht $a + 1$ Kugeln in einer Reihe nebeneinander liegen.

Auflösung. Die Anzahl der Kugeln in den einzelnen Schichten ist:

$$(a+1);\ 2(a+2);\ 3(a+3);\ 4(a+4);\ \text{u. s. w.}$$

Daher ist $S = (a+2a+3a+\ldots+na)+(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)$

$$= \frac{(a+na)n}{2}+\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n^3}{3}+(a+1)\frac{n^2}{2}+(3a+1)\frac{n}{6}.$$

VII. Die Summe S der n ersten Glieder der Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots\ldots$$

anzugeben, wenn a, b, c, d, e,...... die aufeinanderfolgenden Glieder ein und derselben höhern Progression sind.

Auflösung. 1) Sind alle Coefficienten $= 1$, so ist (nach §. 44)

$$S = (x^n-1) : (x-1).$$

2) Ist $a, b, c, d, \ldots = 1, 2, 3, 4, \ldots$, so ist

$$S = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots\ldots+nx^{n-1},$$

$$xS = \quad x+2x^2+3x^3+\ldots+(n-1)x^{n-1}+nx^n,$$

also $xS-S = nx^n-(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})=nx^n-\frac{x^n-1}{x-1}$,

daher $S = \frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^n-1}{x(-1)\,(x-1)}$.

3) Ist a. b, c, d, ... = 1, 3, 6, 10, ..., so ist

$$S = 1 + 3x + 6x^2 + \ldots + (n+1)_{(2)} x^{n-1},$$

$$xS = \quad x + 3x^2 + \ldots\ldots + n_{(2)} x^{n-1} + (n+1)_{(2)} x^n,$$

also $xS - S = (n+1)_{(2)} x^n - (1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1})$

$$= (n+1)_{(2)} x^n - \left\{\frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^n - 1}{(x-1)(x-1)}\right\},$$

daher $S = \frac{1}{x-1}\left\{(n+1)_{(2)} x^n - \frac{nx^n}{x-1} + \frac{x^n-1}{(x-1)(x-1)}\right\}.$

In ähnlicher Weise wird die Aufgabe gelöst, wenn a, b, c, d.... einer anderen Summenreihe angehören.

Zehntes Capitel.

Von den höheren Gleichungen.

§. 128. Erklärung.

Eine geordnete höhere Gleichung enthält die Unbekannte mindestens in der 3ten Potenz. Ihre allgemeine Form ist:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Sie ist in diesem Falle vom nten Grade und wird kürzer durch $X_n = 0$ bezeichnet. Sämmtliche Werthe von x, welche der Gleichung genügen, heißen Wurzeln derselben. Jede Gleichung hat mindestens eine (reelle oder imaginäre) Wurzel. Die Coefficienten der Gleichung können reell oder imaginär sein, doch wird in den folgenden §§. stets vorausgesetzt, daß sie reell sind.

Anm. Die Behauptung, daß jede Gleichung mindestens eine Wurzel haben müsse, läßt sich zwar streng beweisen, doch ist der Beweis so schwierig, daß er hier nicht gegeben werden kann. Uebrigens hat die Behauptung auch ohne Beweis etwas Einleuchtendes und findet im folgenden §. in den Lehrsätzen 6—9 für einzelne Fälle ihre Bestätigung.

A. Von den allgemeinen Eigenschaften der höheren Gleichungen.

§. 129. Lehrsätze.

1) Ist α eine Wurzel der Gleichung $X_n = 0$, so ist X_n durch $x - \alpha$ theilbar.

Beweis. Dividirt man X_n durch $x - \alpha$, bis der Rest P kein x mehr enthält, so ist

$$X_n - (x - \alpha)X_{n-1} = P.$$

In dieser Gleichung erhalten die Ausdrücke X_n und $(x - \alpha)X_{n-1}$ den Werth Null, wenn $x = \alpha$ gesetzt wird; daher ist auch $P = 0$, folglich

$$X_n = (x - \alpha)X_{n-1}.$$

2) Eine Gleichung vom n^{ten} Grade hat n Wurzeln.

Beweis. Die gegebene Gleichung $X_n = 0$ hat mindestens eine Wurzel. Wird diese mit α_1 bezeichnet, so ist nach 1)

$$X_n = (x - \alpha_1)X_{n-1} = 0.$$

Nun kann sowohl $x - \alpha_1$, wie auch X_{n-1} gleich Null sein. Ist letzteres der Fall, so folgt aus $X_{n-1} = 0$, daß diese Gleichung ebenfalls mindestens eine Wurzel α_2 haben müsse. Deshalb ist

$$X_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)X_{n-2}.$$

Entwickelt man in dieser Art weiter, so erhält man schließlich:

$$X_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\dots(x - \alpha_n).$$

Es sind daher $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ die n Wurzeln obiger Gleichung, weil $X_n = 0$ ist, sobald x einer dieser Wurzeln gleichgesetzt wird.

Anm. Diese Wurzeln brauchen nicht sämmtlich von einander verschieden zu sein. — Es kann X_n außer diesen nicht noch eine Wurzel haben, denn wäre β eine solche, so müßte X_n durch $x - \beta$ theilbar sein; dies ist aber nur möglich, wenn $x - \beta$ gleich einem der Faktoren $(x - \alpha_v)$, wenn also $\beta = \alpha_v$ ist.

3) Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n,$$

so ist a_1 gleich der Summe der Wurzeln, a_2 gleich der Summe der aus ihnen gebildeten Amben (ohne Wiederholungen und Versetzungen), a_3 gleich der Summe der Ternen u. s. w., a_n gleich dem Produkte der Wurzeln, jedoch

alles dies unter der Voraussetzung, daß auf die Vorzeichen von a_1, a_2 u. s. w. keine Rücksicht genommen wird.

Beweis. Er folgt aus 2) und aus §. 65.

4) Sind alle Coefficienten einer Gleichung ganze Zahlen, so sind alle Wurzeln unter den Faktoren enthalten, in welche sich das letzte Glied zerlegen läßt, oder die Gleichung hat auch irrationale Wurzeln.

Beweis. Er folgt aus 3).

5) Wenn der Ausdruck X_n einen positiven Werth annimmt, sobald man $x = \alpha$ setzt, hingegen einen negativen, sobald man $x = \beta$ setzt, so liegt eine Wurzel der Gleichung $X_n = 0$ zwischen α und β.

Beweis. Vergleiche §. 128, Anm.

6) Jede Gleichung vom $(2n + 1)^{ten}$ Grade muß mindestens eine reelle Wurzel haben, deren Vorzeichen dem des letzten Gliedes entgegengesetzt ist.

Beweis. Es läßt sich leicht für x ein solcher Werth α einsetzen, daß dadurch das erste Glied größer wird als alle übrigen zusammen. Setzt man also $x = \alpha$, so ist X_{2n+1} positiv, und setzt man $x = -\alpha$, so ist folglich X_{2n+1} negativ. Setzt man ferner $x = 0$, so ist X_{2n+1} positiv oder negativ, je nachdem das letzte Glied es ist. Ist dieses positiv, so muß eine Wurzel zwischen 0 und $-\alpha$, ist es negativ, zwischen 0 und $+\alpha$ liegen.

7) Jede Gleichung vom $2n^{ten}$ Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat mindestens eine positive und eine negative reelle Wurzel.

Beweis. Für $x = 0$ ist X_{2n} gleich dem letzten Gliede $(-c)$. Ferner erhält X_{2n} einen positiven Werth, wenn man $x = \mp d$ setzt, und d eine sehr große Zahl bedeutet. Es liegt daher eine Wurzel zwischen 0 und $+d$, eine andere zwischen 0 und $-d$.

8) Jede Gleichung vom $2n^{ten}$ Grade hat eine gerade Anzahl von reellen Wurzeln.

Beweis. Hat man eine ungerade Anzahl von Wurzeln gefunden, z. B. α, β, γ, so läßt sich X_{2n} dividiren durch $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, und man erhält alsdann $X_{2n-3} = 0$. Diese Gleichung hat aber mindestens eine reelle Wurzel.

9) Jede Gleichung vom $(2n + 1)^{ten}$ Grade hat eine ungerade Anzahl von reellen Wurzeln.

Beweis. Er folgt aus 8.

10) Die imaginären Wurzeln kommen stets paarweise vor. Ist $p + qi$ die eine Wurzel, so ist $p - qi$ die andere.

Beweis. Ist $p + qi$ eine Wurzel der Gleichung, und setzt man diesen Werth statt x ein, so läßt sich die Gleichung so ordnen, daß sie aus einem reellen und einem imaginären Theile besteht, daß also

$$M + Ni = 0$$

ist. In diesem Falle ist aber $M = 0$ und $N = 0$, folglich auch

$$M - Ni = 0.$$

Da man nun letztere Form $M - Ni$ erhalten haben würde, wenn man $x = p - qi$ gesetzt hätte, so muß $p - qi$ eine Wurzel der Gleichung sein.

B. Von der Transformation*) der höheren Gleichungen.

§. 130. Aufgaben.

I. Die Gleichung $X_n = 0$ so zu transformiren, daß die Potenz x^{n-1} in ihr nicht mehr vorkommt.

Auflösung. Ist $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$, so setzt man $x = z + r$ und ordnet nach z. Man erhält:

$$0 = (z + r)^n + a_1(z + r)^{n-1} + \ldots,$$

oder

$$\begin{aligned} 0 = z^n &+ nrz^{n-1} + n_{(2)}r^2z^{n-2} + \ldots \\ &+ a_1z^{n-1} + (n-1)a_1rz^{n-2} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}$$

Die übrigen Glieder können die Potenz z^{n-1} nicht mehr enthalten, und diese muß daher verschwinden, wenn $nr + a_1 = 0$, oder

$$r = -\frac{a_1}{n},\ \text{also}\ x = \left(z - \frac{a_1}{n}\right)\ \text{ist.}$$

Anm. In der so reducirten Gleichung ist die Summe der Wurzeln gleich 0.

II. Die Gleichung $X_n = 0$ in eine andere Gleichung zu verwandeln, deren Wurzeln um p größer oder kleiner sind, als die der erstern.

Auflösung. Man setzt $x = y \mp p$ und ordnet nach y. Das erste Glied ist y^n, das letzte ist $(\mp p)^n + a_1(\mp p)^{n-1} + a_2(\mp p)^{n-2} + \ldots + a_n$.

III. Die Gleichung $X_n = 0$ in eine andere Gleichung zu verwandeln, deren Wurzeln pmal kleiner sind, als die der erstern.

---

*) Eine transformirte Gleichung ist eine richtig abgeleitete.

Auflösung. Man setzt $x = py$ und erhält:

$$p^n y^n + a_1 p^{n-1} y^{n-1} + a_2 p^{n-2} y^{n-2} + \ldots + a_n = 0, \text{ oder}$$

$$y^n + \frac{a_1}{p} y^{n-1} + \frac{a_2}{p^2} y^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} = 0.$$

IV. Die Gleichung $X_n = 0$ in eine andere Gleichung zu verwandeln, deren Wurzeln $p$mal größer sind, als die der erstern.

Auflösung. Man setzt $x = (y : p)$ und erhält:

$$\frac{y^n}{p^n} + a_1 \frac{y^{n-1}}{p^{n-1}} + \cdots + a_n = 0, \text{ oder}$$

$$y^n + a_1 p y^{n-1} + a_2 p^2 y^{n-2} + \cdots + a_n p^n = 0.$$

Anm. Mit Hülfe dieser Transformation schafft man aus einer Gleichung die Nenner weg; p muß alsdann gleich dem Generalnenner sein. Hat man z. B. die Gleichung $x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + 3 = 0$, so setzt man $x = (y : 30)$ und erhält:

$$y^5 + 40y^4 + 360y^3 + 13500y^2 + 4050000y + 72900000 = 0.$$

§. 131. Erklärung.

Eine besondere Art der Transformation erlauben die **reciproken** Gleichungen. Bei diesen haben die Coefficienten der gleichweit vom ersten und letzten Gliede abstehenden Glieder gleiche Größe und gleiches Vorzeichen, und die Gleichungen selbst sind vom $2n^{ten}$ Grade. Reciprok sind z. B. die Gleichungen:

1) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0;$

2) $x^6 - 4x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 1 = 0;$

3) $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + 1 = 0.$

Ferner rechnet man zu den reciproken Gleichungen noch diejenigen, die durch Multiplication der Gleichung 3) mit $x \mp 1$ entstehen. Sie haben eine der nachstehenden Formen:

1) $x^{2n+1} + b_1 x^{2n} + b_2 x^{2n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + 1 = 0$, oder

2) $x^{2n+1} + b_1 x^{2n} + b_2 x^{2n-1} + \cdots - b_2 x^2 - b_1 x - 1 = 0.$

Da aber erstere Gleichung die Wurzel -1, letztere die Wurzel $+1$ haben muß, und man daher durch Division mit $x \mp 1$ die frühere Form leicht herstellen kann, so ist nur diese als eigenthümlich hervorzuheben.

Bei jeder reciproken Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade muß neben einer Wurzel α auch die Wurzel $\frac{1}{\alpha}$ vorkommen, da nur in diesem Falle das Produkt aller Wurzeln gleich dem letzten Gliede (1) sein kann.

Anm. Diese letztere Eigenschaft läßt sich auch dadurch nachweisen, daß man einmal $x=\alpha$ setzt und dann durch α^{2n} dividirt, ferner aber $x=\frac{1}{\alpha}$; in beiden Fällen erhält man denselben Ausdruck, und $\frac{1}{\alpha}$ ist daher eine Wurzel.

§. 132. Lehrsatz.

Jede reciproke Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade läßt sich auf eine Gleichung vom n^{ten} Grade reduciren.

Bew. Es ist $x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+1=0.$

Dividirt man durch x^n, so ist ferner

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_2\frac{1}{x^{n-2}}+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}=0.$$

Addirt man in dieser Gleichung das erste und letzte, zweite und vorletzte u. s. w. Glied, so ist

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+a_2\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\cdots+a_n=0.$$

Setzt man nun $x+\frac{1}{x}=y$, so ist

1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$; daher $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$;

2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=y^3$; " $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$;

3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}=y^4$; " $x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2.$

Fährt man in dieser Entwicklung fort und setzt die gefundenen Werthe in obiger Gleichung ein, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$y^n+c_1y^{n-1}+c_2y^{n-2}+\cdots+c_n=0.$$

Ist nun α eine Wurzel dieser Gleichung, so ist also

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)=\alpha \text{ oder } x^2-\alpha x=-1, \text{ daher}$$

$$x=\tfrac{1}{2}(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-4}).$$

Durch die angeführte Transformation geht z. B. die Gleichung

$$x^8-5x^7+4x^6-2x^5+3x^4-2x^3+4x^2-5x+1=0 \text{ über in:}$$

$$y^4-5y^3+13y-3=0.$$

§. 133. Aufgabe.

Es seien die zwei Gleichungen gegeben:

$$\begin{cases} 1)\ x^m+a_1x^{m-1}+\ldots\ldots+a_m=0, \\ 2)\ x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0. \end{cases}$$

Es sei hierbei $m>n$, und in den verschiedenen Coefficienten a und b sei eine zweite Unbekannte y enthalten. Die Unbekannte x zu eliminiren.

Auflösung. Multiplicirt man 2) mit x^{m-n} und subtrahirt dann diese Gleichung von 1), so erhält man eine neue Gleichung vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade. Aus dieser und aus 2) bildet man in derselben Art eine neue Gleichung vom $m-2^{\text{ten}}$ Grade und fährt damit so lange fort, bis man eine zweite Gleichung vom n^{ten} Grade erhält. Man hat alsdann die beiden Gleichungen:

$$2)\ x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0,$$

$$3)\ x^n+c_1x^{n-1}+\cdots\cdots+c_n=0.$$

Subtrahirt man 3) von 2), so erhält man eine Gleichung vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade. Multiplicirt man ferner 2) mit c_n, 3) mit b_n und subtrahirt dann 3) von 2), so ist die neue Gleichung, nachdem man sie mit x gekürzt hat, ebenfalls vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade. Die zwei Gleichungen vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade behandelt man nun ebenso wie 2) und 3) und gelangt so endlich zu einer Gleichung, die nur noch Potenzen von y enthält.

So erhält man z. B. aus den Gleichungen

$$\begin{cases} 1)\ x^3+3y^4x+2=0 \\ 2)\ x^2+3yx+1=0, \end{cases}$$

wenn man 2) mit x multiplicirt und dann von 1) subtrahirt,

$$3)\ -3yx^2+(3y^4-1)x+2=0.$$

Multiplicirt man ferner 2) mit 3y und addirt 3), so ist

$$4)\ x(3y^4+9y^2-1)+3y+2=0.$$

Multiplicirt man nun 2) mit 2 und subtrahirt 3), so erhält man, wenn man noch durch x dividirt,

5) $x(2+3y)+6y+1-3y^4=0.$

Aus 4) und 5) erhält man aber schließlich:

6) $9y^8+27y^6-18y^5-6y^4-54y^3+18y+5=0.$

C. Von der Auflösung der höheren Gleichungen.

§. 134. Aufgabe.

Die rein kubische Gleichung $x^3-a^3=0$ nach x zu lösen.

Auflösung. Es muß a eine Wurzel dieser Gleichung sein. Um die beiden andern Wurzeln zu finden, setzt man:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0 \text{ (§. 129, 1).}$$

Der Faktor $x^2 + ax + a^2$ hat den Werth 0, wenn

$$x = \frac{1}{2}\left(-a \mp \sqrt{-3a^2}\right) = a \cdot \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2} \text{ ist.}$$

Die drei Werthe von x sind also:

$$a;\quad a \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad a \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Anm. Setzt man in diesen drei Werthen $a=1$, so erhält man die drei Werthe von $\sqrt[3]{1}$. Man kann daher die Auflösung der gegebenen Gleichung auch durch die Gleichung $x = a \cdot \sqrt[3]{1}$ darstellen, wobei a eindeutig, $\sqrt[3]{1}$ dreideutig genommen wird.

§. 135. Aufgabe.

Die reducirte kubische Gleichung $x^3+px+q=0$ nach x zu lösen.

Auflösung. Setzt man $x=v+w$, so erhält man:

$$(v+w)^3+p(v+w)+q=0, \text{ oder}$$

$$v^3+3v^2w+3vw^2+w^3+p(v+w)+q=0, \text{ oder}$$

1) $$v^3+w^3+(3vw+p)(v+w)+q=0.$$

Da nun v und w nur in soweit bestimmt sind, daß $v+w=x$ sein muß, so kann man sie in der Art wählen, daß $3vw + p = 0$, also $v = (-p) : 3w$ ist. Alsdann geht die Gleichung 1) über in:

$$\frac{-p^3}{27w^3} + w^3 + q = 0 \text{ oder}$$

$$w^6 + q \cdot w^3 = \tfrac{1}{27}p^3.$$

Folglich ist $w^3 = -\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}$, oder

2) $$w = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Es ist jetzt noch v zu bestimmen. Nun war

$$v^3 = \frac{-p^3}{27w^3} = \frac{-\tfrac{1}{27}p^3}{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$= \frac{-\tfrac{1}{27}p^3\left(-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right)}{\left(-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right)\left(-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right)}$$

$$= \frac{-\tfrac{1}{27}p^3\left(-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right)}{-\tfrac{1}{27}p^3} = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}.$$

Daher ist 3) $v = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$, und

4) $$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Diese Formel heißt die Cardanische. Sie liefert für die Gleichung nur eine Wurzel, nämlich $v + w$, wo v und w die absoluten Wurzelwerthe obiger dritten Wurzeln vorstellen. Die zwei andern Werthe findet man wie in §. 134, indem man die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ durch $x - (v + w)$ dividirt und aus der dadurch entstehenden quadratischen Gleichung die zwei andern Werthe von x bestimmt.

Anm. 1. Man kann diese Werthe auch in folgender Art finden: Es sind v und w die absoluten Werthe der bezüglichen Wurzeln. Die vollständigen Werthe sind:

$$v.(+1);\quad v.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad v.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

$$w.(+1);\quad w.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad w.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Da nun die Werthe von v und w so beschaffen sein müssen, daß $3vw = -p$, also gleich einer reellen Zahl ist, so sind die angeführten Werthe nur in folgenden drei Arten zu der Summe $v+w=x$ zu verbinden:

$$1)\ (v+w);\quad 2)\ v.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + w.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

3) $v.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+w.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Anm. 2. Soll die vollständige kubische Gleichung $ax^3+bx^2+cx+d=0$ gelöst werden, so muß man zunächst das Glied bx^2 entfernen (§. 130, 1).

§. 136. Zusatz.

Die Cardanische Formel erscheint unbrauchbar, und man erhält den sogenannten irreductibelen Fall derselben, wenn p negativ, ferner $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, also $x = \sqrt[3]{m + ni} + \sqrt[3]{m - ni}$ ist.

Dieser scheinbar imaginäre Ausdruck hat jedoch einen reellen Werth. Setzt man nämlich $m = r \cos v$, $n = r \sin v$, so ist (nach §. 112):

$$\sqrt[3]{m+ni}+\sqrt[3]{m-ni}=\sqrt[3]{r}\left\{(\cos v+i\sin v)^{\frac{1}{3}}+(\cos v-i\sin v)^{\frac{1}{3}}\right\} =$$
$$=\sqrt[3]{r}\left\{\cos\frac{v}{3}+i\sin\frac{v}{3}+\cos\frac{v}{3}-i\sin\frac{v}{3}\right\}=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{v}{3}.$$

In diesem für x gefundenen Werthe sind noch die unbekannten Ausdrücke r und v zu bestimmen. Versteht man nun in den Gleichungen

$$m = r\cos v, \quad n = r\sin v$$

unter r stets eine positive Zahl, bezieht man also das negative Vorzeichen, welches bei m und n stehen könnte, auf die Ausdrücke cos v und sin v, so läßt sich hieraus zunächst der Quadrant erkennen, in welchem v liegen muß. Außerdem erhält man aber:

1) $m^2 + n^2 = r^2$, daher $r = +\sqrt{m^2 + n^2}$;

2) $(n : m) = \sin v : \cos v = \operatorname{tg} v$.

§. 137. Erklärung.

Die biquadratischen Gleichungen lassen ebenfalls eine allgemeine Auflösung zu, in Folge davon auch die reciproken Gleichungen (nach §§. 131 und 132) bis zum 9ten Grade, während hingegen die übrigen Gleichungen vom 5ten Grade an nicht mehr allgemein zu lösen sind. Es läßt sich indessen jede Gleichung höheren Grades auflösen, sobald die Coefficienten numerisch gegeben sind. Da dies in der Praxis stets der Fall ist, so kann man eine allgemeine Auflösung leicht entbehren, um so mehr, als man selbst die allgemeine Auflösung der biquadratischen Gleichungen ihrer Unbequemlichkeit wegen nicht anzuwenden pflegt.

§. 138. Aufgabe.

Die numerische höhere Gleichung

$$x^4 + 18x^3 - 274x + 255 = 0$$

unter der Voraussetzung, daß sämmtliche Wurzeln rational sind, nach x aufzulösen.

Auflösung. Die gesuchten Wurzeln müssen (nach §. 129, 4) Faktoren des letzten Gliedes (255) sein, müssen sich also unter den Zahlen 1, 3, 5, 17, 51, 85, 255 befinden. Man erhält folglich sehr leicht einige der Wurzeln, wenn man diese Faktoren sowohl mit positivem, als auch mit negativem Vorzeichen statt x in der gegebenen Gleichung einsetzt, und findet z. B., daß die Werthe + 1 und + 3 der Gleichung genügen. Um die noch übrigen zwei Wurzeln schneller zu finden, dividirt man (nach §. 129, 2) die Gleichung durch $(x - 1) . (x - 3)$. Man erhält hierdurch die Gleichung $x^2 + 22x + 85 = 0$ und aus dieser die noch fehlenden zwei Wurzeln — 5 und — 17.

Anm. 1. Um diese Art der Auflösung anwenden zu können, muß man aus der gegebenen Gleichung die etwa vorkommenden Nenner entfernen (§. 130, IV).

Anm. 2. Ist das letzte Glied sehr groß, und hat dasselbe viele Faktoren, so daß man also viele Versuche machen müßte, um die Wurzeln zu finden, so kürzt man die Rechnung in folgender Art ab. Es sei die Gleichung gegeben:

$$x^4 - 40x^3 + 595x^2 - 3900x + 9504 = 0.$$

Setzt man $x = y + a$ und ordnet nach y, so erhält man als letztes Glied: $(a^4 - 40a^3 + 595a^2 - 3900a + 9504)$. Die Faktoren dieses Gliedes können Wurzeln der transformirten Gleichung sein und sind dann um a kleiner als die Wurzeln der ersten Gleichung. Man giebt nun a einen solchen Werth, daß dieses letzte Glied klein wird; in dem angegebenen Beispiele setzt man $a = 10$ und erhält dann für das letzte Glied den Werth 4. Die Faktoren dieses Gliedes sind ∓ 1, ∓ 2, ∓ 4, und die einzigen Werthe von x, welche der ursprünglichen Gleichung genügen könnten, sind daher 10 ∓ 1, 10 ∓ 2, 10 ∓ 4, oder 11, 9, 12, 8, 14, 6. Durch das oben angegebene Verfahren findet man schließlich die Wurzeln 12, 11, 8, 9.

§. 139. Aufgabe.

Die numerische höhere Gleichung

$$x^3 - 3x + 1{,}6 = 0$$

näherungsweise nach x aufzulösen.

Auflösung. Man setzt für x die Werthe 0, $\mp$ 1, $\mp$ 2 u. s. w. ein. Sobald nun der Werth des Ausdrucks $x^3 - 3x + 1{,}6$ beim Einsetzen von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen verschiedene Vorzeichen erhält, so hat man die Gränzen gefunden, zwischen welchen eine der Wurzeln liegen muß. Es ergiebt sich in dieser Art, daß eine Wurzel zwischen den Gränzen 0 und

$+1$ liegt. Setzt man nun statt x die Werthe 0,1; 0,2; 0,3;.... 0,9 ein, so erhält man die engern Gränzen 0,6 und 0,7; ferner erhält man durch Einsetzen der Werthe 0,61; 0,62; .... 0,69 die Gränzen 0,60 und 0,61, ferner die Gränzen 0,608 und 0,609 durch Einsetzen der Werthe 0,601; 0,602; .... 0,609 u. s. w.

Hat man in dieser Weise die eine Wurzel mit genügender Genauigkeit bestimmt, so sucht man in gleicher Art die Gränzen für eine zweite und dritte Wurzel.

§. 140. Zusatz.

Die Berechnung der irrationalen Wurzelwerthe wird um so schwieriger, je genauer sie sein soll. Zur Bestimmung der späteren Decimalstellen wendet man daher lieber das nachfolgende einfachere Verfahren an.

Setzt man in der Gleichung

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

für welche der Näherungswerth $x = b$ gefunden ist, den genaueren Werth $x = y + b$ ein und ordnet nach y, so erhält man die Gleichung

$$0 = + y^0(b^n + a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \cdots\cdots + a_n)$$
$$+ y^1(nb^{n-1} + (n-1)a_1b^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}b) + \cdots + y^n,$$

oder $0 = C + C_1y + C_2y^2 + \cdots\cdots + y^n$.

Bedeutet nun y eine sehr kleine Zahl, so kann man für vorliegenden Fall

$0 = C + C_1y$, daher $y = (-C) : C_1$ setzen.

Man erhält aber den Werth von C, wenn man in der gegebenen Gleichung überall b statt x setzt, ferner den Werth von C_1, wenn man in jedem der Ausdrücke $(b+y)^n$, $a_1(b+y)^{n-1}$, $a_2(b+y)^{n-2}$, $\cdots a_{n-1}(b+y)$ den Coefficienten bestimmt, welcher zur Potenz y^1 gehört. Dieser Coefficient ist in dem Ausdrucke $a_v(b+y)^v$ gleich $v \,.\, a_v \,.\, b^{v-1}$, und man findet also den Werth des Ausdrucks C_1, wenn man jedes Glied des Ausdrucks C mit dem zu b gehörenden Exponenten multiplicirt und dann den Exponenten von b um 1 verkleinert.

Für die Gleichung $x^3 - 3x + 1{,}6 = 0$ war in vorigem §. der Näherungswerth $x = 0{,}6 + y$ erhalten worden. Nun ist

$$C \;= b^3 - 3b + 1{,}6 = (0{,}6)^3 - 3(0{,}6) + 1{,}6 = 0{,}016;$$
$$C_1 = 3b^2 - 3 = 3(0{,}6)^2 - 3 = -1{,}92.$$

Daher ist $y = (-C) : C_1 = (-0{,}016) : (-1{,}92) = 0{,}0083\ldots$, folglich $x = 0{,}6083\ldots$

Soll der Werth von x noch genauer bestimmt werden, so setzt man wiederum $x = 0{,}6083 + y$ und wendet dasselbe Verfahren nochmals an.

Anm. 1. Um nicht beim Einsetzen der Werthe 1, 2, 3.. für x dieses Verfahren unnützer Weise zu lange fortzusetzen, ist es vortheilhaft, gewisse Gränzen aufzusuchen, über welche hinaus überhaupt keine Wurzel der Gleichung möglich ist. Um diese Gränzen zu finden, transformirt man die Gleichung $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ folgendermaßen. Man setzt:

$$1)\ x^n = 1 + (x^n - 1) = 1 + (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1),$$

$$2)\ x^{n-1} = 1 + (x^{n-1} - 1) = 1 + (x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1),$$

und entwickelt in derselben Art alle übrigen Glieder mit positiven Coefficienten, läßt aber die andern ungeändert. Alsdann ordnet man nach x. Die weitere Ausführung mag an einem bestimmten Beispiele gezeigt werden.

Ist $a_0x^6 + a_1x^5 - a_2x^4 + a_3x^3 - a_4x^2 - a_5x - a_6 = 0$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
a_0x^6 &= a_0(x-1)x^5 + a_0(x-1)x^4 + a_0(x-1)x^3 + a_0(x-1)x^2 + a_0(x-1)x + a_0(x-1) + a_0\\
a_1x^5 &= \qquad + a_1(x-1)x^4 + a_1(x-1)x^3 + a_1(x-1)x^2 + a_1(x-1)x + a_1(x-1) + a_1\\
-a_2x^4 &= \qquad - a_2x^4\\
a_3x^3 &= \qquad + a_3(x-1)x^2 + a_3(x-1)x + a_3(x-1) + a_3\\
-a_4x^2 - \ldots &= \qquad - a_4x^2 - a_5x - a_6
\end{aligned}$$

Setzt man nun in der so transformirten Gleichung für x die aufeinanderfolgenden positiven Zahlen ein, so kann X_n nur so lange einen negativen Werth haben, als

1) $(a_0 + a_1)(x - 1) < a_2$ oder $x < \frac{a_2}{a_0 + a_1} + 1$, ferner

2) $(a_0 + a_1 + a_3)(x - 1) < a_4$ „ $x < \frac{a_4}{a_0 + a_1 + a_3} + 1$, ferner

3) $(a_0 + a_1 + a_3)(x - 1) < a_5$ „ $x < \frac{a_5}{a_0 + a_1 + a_3} + 1$, ferner

4) $(a_0 + a_1 + a_3)(x - 1) < a_6$ „ $x < \frac{a_6}{a_0 + a_1 + a_3} + 1$

ist. Dividirt man also jeden negativen Coefficienten durch die Summe der voranstehenden positiven und addirt 1 zu diesem Quotienten, so ist der größte dieser Ausdrücke die Gränze, über welche hinaus X_n nur positiv sein kann, ist also auch die Gränze für die positiven Wurzeln.

Um die Gränze für die negativen Wurzeln zu finden, verwandelt man die gegebene Gleichung durch Umänderung der Vorzeichen aller Glieder mit ungeraden Exponenten in eine andere, deren Wurzeln dieselben sind, wie die der ersten Gleichung, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die Gränze der positiven Wurzeln für die zweite Gleichung ist dann zugleich die Gränze der negativen Wurzeln für die erste Gleichung.

Anm. 2. Wenn sich bei der annähernden Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung keine neuen Gränzen für fernere Wurzeln auffinden lassen, obgleich noch fernere Wurzeln vorhanden sein müssen, so sind letztere imaginär. Die Bestimmung derselben ist möglich, wird aber der Schwierigkeit wegen hier übergangen. Als besonderer Fall mag nur die nachfolgende Aufgabe hervorgehoben werden, welche die Lehre von den Wurzeln vervollständigt.

Aufgabe. Die Gleichung $x^m = a^m$ nach x zu lösen.

Auflösung. Es ist $x = \sqrt[m]{a^m} = a\sqrt[m]{1}$, wenn hierbei a den absoluten Wurzelwerth bezeichnet. Um die Werthe des mehrdeutigen Ausdrucks $\sqrt[m]{1}$ zu bestimmen, setzt man $1 = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi$. Alsdann ist

$$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{2n}{m}\pi + i \sin\frac{2n}{m}\pi \quad (§. 112, 5).$$

Setzt man in diesem Ausdrucke für n die Werthe 0, 1, 2...... (m—1) ein, so erhält man m verschiedene Werthe für den Ausdruck $\sqrt[m]{1}$, und setzt man ferner für n die nun folgenden Werthe m, (m+1) u. s. w. ein, so wiederholen sich die bereits gefundenen Werthe des Ausdrucks $\sqrt[m]{1}$.

Die Werthe des Ausdrucks $\sqrt[m]{-1}$ findet man in ähnlicher Art, indem man $-1 = \cos(2n+1)\pi + i \sin(2n+1)\pi$ setzt.

Aufgaben.

Folgende höhere Gleichungen nach x aufzulösen:

1) $x^3 - 12x - 16 = 0$; 2) $x^3 - 3x - 2 = 0$; 3) $x^3 + 12x + 63 = 0$;

4) $x^3 + 4\frac{1}{4}x^2 - 9\frac{7}{8}x + 3\frac{3}{4} = 0$; 5) $x^3 - 3\frac{5}{6}x^2 + 2\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0$;

6) $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{12} = 0$; 7) $x^4 - x^3 - 49x^2 - 71x + 120 = 0$;

8) $x^4 - 19x^3 + 105x^2 - 197x + 110 = 0$;

9) $x^4 - 4\frac{3}{4}x^3 + 6\frac{1}{8}x^2 - 2\frac{3}{4}x + \frac{3}{8} = 0$;

10) $x^4 - 15x^3 + 75x^2 - 143x + 90 = 0$;

11) $x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 15x^2 - 26x + 24 = 0$;

12) $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$.

Auflösungen.

1) $x = 4; -2; -2$; 2) $x = +2; -1; -1$;

3) $x = -3; \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{-75})$; 4) $x = \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -6$; 5) $x = 3; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$;

6) $x = \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\sqrt{5}; -\frac{1}{2}\sqrt{5}$; 7) $x = 1; -3; -5; 8$;

8) $x = 1; 2; 5; 11$; 9) $x = \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 1; 3$; 10) $x = 2; 5; 4 \mp \sqrt{7}$;

11) $x = 1; -1; 2; 3; 4$; 12) $x = 3; 3; -3; \mp\sqrt{-1}$.

Druck von Weniger & Co. in Dessau.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gerlach, Hermann von

Lehrbuch der Mathematik Für den Schul- und Selbst-Unterricht

Bd.: 3

Dessau 1867

Math.u. 62 wu-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593854-0